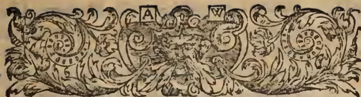
ARITHMETICA.



PARISIIS,
Apud Andream Wechelum.
1562.
Cum privilegio Regis.



LIBER PRIMUS ARITHMETICÆ.

Cap. I. quid arithmetica, numerus, unitas, & quæ partes arithmeticæ.

1. ARITHMETICA *eſt doctrina bene numerandi.*

2. *Numerus eſt ex unitatibus collecta multitudo.* 2.d.7.

Ut binarius numerus eſt collectus ex uno & uno, ternarius ex uno & uno & uno, quaternarius ex uno & uno & uno & uno, & quilibet deinde numerus eſt ex unitatibus collecta multitudo.

3. U*nitas eſt ſecundum quam unumquodque unum dicitur.* 1.d.7.

Ut unus Deus, unus mundus, unus Rex. Unitas numerus non eſt: nec enim eſt ex unitatibus collecta multitudo: Attamen ut unitas definitur, ſecundum quam unumquodque unum dicitur, ſic numerus definiri poteſt, ſecundum

quem unumquodque numeratur:ut unum,duo, tria: & ſic unitas in multis arithmeticæ partibus pro numero uſurpatur. Proprié igitur unitas numerus nõ eſt,ſed initium numeri,é quo primúm numerus fit,& in quod ultimum reſolvitur,eſtq; in numero aliquid minimũ, nempé unitas,quávis nihil eſſe poſſit maximum. Arithmeticæ partes duæ ſunt.

4. *Arithmeticæ prima pars eſt, quæ interpretatur ſimplices qualitates numerorum.*

Et quidem in generali numeratione primúm: deinde in ſpecialibus differentiis numerorũ.Generalis autem numeratio eſt prima aut conjũcta: Prima,ut additio & ſubductio

Cap. 2. de additione,ubi de arithmeticis notis.

5. *Additio eſt numeratio prima, qua numerus cum numero ſemel additur, & habetur totus.*

Hic ſunt decem unitates,1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. quibus addendis, numeramus unum, duo, tria, quatuor,quinque, ſex, ſeptem, octo,novem,decem,ubi ad numerum antecedentem unitas additur: Addãtur duo cum duobus,totus erit quatuor,quinque cum tribus,totus erit octo: Cujuſvis

vis autem numeri addendi & colligendi decem ſunt notæ, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0: quarum prima unum ſignificat, ſecũda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, ſexta ſex, ſeptima ſeptem, octava octo, nona novem: Circulus, quæ nota eſt ultima, nil per ſe ſignificat: valet tamen ad alias notas amplificandum. Amplificationis veró gradus ſunt quatuor, deincepſq; perpetuó ſimiliter iterantur. Nam de primis novem, quælibet ſola aut ultimo univerſi numeri loco ſuum numerum ſemel exprimit, penultimo decies, tertio deincẽties, quarto millies, quinto decies millena, ſexto centies millena, ſeptimo millies milleni & ſic deinceps. Numeros igitur ita notabis, unum 1, undecim 11, centum undecim 111, mille centum undecim 1111. Duo 2. viginti duo 22, ducenta viginti duo 222, duo millia ducenta viginti duo 2222. mille ducẽta triginta quatuor 1234, Ergo in hac amplificatione circulus amplificabit notam ſibi præpoſitam. Notabis enim his notis 10, viginti 20, triginta 30, quadraginta 40, centum 100, ducenta 200, trecenta 300, quadringenta 400. Duo millia viginti 2020, quater millena millia, triginta millia ducenta unum 4030201. Atqui ſi numeri pluribus notis collecti periodus longior fuerit, ut eam numerare condiſcas, millenarii loci, tanquã in membris orationis ſenſus abſoluti, punctis diſtinguantur, ultimum punctum erit millium, penultimum millenorum millium, tertium millies

millenorum millium, quartũ millies millies millenorum millium: Tum ſingula pũcta deinceps, ſi plura ſint, millies amplificabunt. Numerum igitur decem notis ſic additum & interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0, tanquam mẽbris quatuor diſtinctam periodum numerabis. Primum membrum millies millena millia, ſecundum ducenties tricies quater millena millia, tertium quingẽta ſexaginta ſeptem millia, quartum octingenta nonaginta. Atque hæc interpunctio tantiſper adhibenda, dum te exerceas in notis arithmeticis. Si numeri diverſi pluribus notis conſtent, nec totus ſimul cum toto addi poſſit, ſiniſtrorſum ſingulares cum ſingularibus, denarii cum denariis, & ſic deinceps addendi, ut excreſcentes ſumma locis excreſcentibus ordine faciliús notentur; & ex iis additus & collectus numerus, interjecta lineola ſubnotetur. Quæratur igitur quis numerus ſit totus é 5 6 7 8 9, & 1 2 3 4, ordine diſpoſitis numeris, ut homogeneri reſpondeant, ſic

5 6 7 8 9
1 2 3 4

Incipies ab ultimo loco, 9 & 4, ſunt 13: ſubnotabis 3, reſervabis 1 0, pro 1, ſequentis loci: Ergo dices ſequenti loco, 1 & 8 & 3, ſunt 12, ſubnotabis 2, & reſervabis, ut anteá, 1 0 pro 1, ſequẽtis loci: Tum 1 & 7 & 2, ſunt 1 0: ſubnotabis 0, reſervabis ſimiliter 1 0, pro 1, ſequentis loci: Tandem 1 & 6 & 1, ſunt 8, quæ ſubnotabis: Poſtremó 5 ſola reperies, adnotabis denique 5, & invenies

nies his duobus numeris additis totum esse 58023. Inductionis summa sic erit,

```
 5 6 7 8 9
   1 2 3 4
 ---------
 5 8 0 2 3
```

Cap. 3. de subductione.

6. *Subductio est numeratio prima, qua numerus á numero semel subducitur, & habetur qui sit reliquus.*

Subducito 2 de 5, reliquus erit 3, subducito 4 de 9, reliquus erit 5. Subducenda sint 234 de 345, dispositis ordine numeris, ut respondeant homogenei inter se hoc modo,

```
3 4 5
2 3 4
```

Subducendo infrá, suprá autem á quo subductio facienda: Incipies á sinistra dextrorsum, cōtraquám in additione, ut 2 subductis é 3, supernotabis 1, deletis 3 & 2: deinde subduces 3 de 4, & supernotabis 1, deletis 4 & 3. Denique subductis 4 é 5, supernotabis 1, deletis 5 & 4, unde invenies reliquum esse 111, cúm subduxeris 234 á 345. Inductio tota sic erit,

```
1 1 1
3 4 5
2 3 4
```

Sed in hac ſubductionis via, cúm ſequẽs ſubducẽda nota major eſt quám ſuprapoſita, ne notarum litura moleſta ſit, commodiús é reliquo præcedente 1 mente reſervabis, quod notam ſequentem denario augeat, ut ſi ſubducenda ſint 345 de 432, cúm ſubduces 3 de 4, non ſupernotabis 1, quia 4 ſequens ſubducenda nota, major eſt ſuprapoſito 3, ſed illud mente reſervabis: & 4 ſubductis á 13, manerent 9, ſed 8 tantúm ſupernotabis, & 1 mente reſervabis: quia 5 ſequens ſubducenda nota major eſt. Itaque 5 ſubductis á 12, reliqua 7 ſupernotabis, unde invenies ſubductis 345 de 432, relinqui 87. Tota inductio ſic erit.

8 7
4 3 2
3 4 5

Hæc ſubducendi vera via eſt, nec omnino priús antecedens nota eſt ſubducẽda, quám provideris, unde reliquæ ſubduci poſſint. Sic diviſio, id eſt, multiplex ſubductio poſteá progredietur, & ſic de ſequentibus providebit. Itaque meditãda priús eſt ſimplex iſta ſubductio, unde multiplex illa poſteá formãda ſit. In majoribus autem exemplis idem eſt, ut ſubductis 48765293 de 57295490, ſupererunt 8530197.

Cap. 4. de multiplicatione.

Numeratio ſimplicis numeri prima ejuſmodi eſt,

di est, conjuncta deinceps erit in multiplicatione & divisione.

7. *Multiplicatio est numeratio conjuncta, qua multiplicandus toties additur, quoties unitas in multiplicante continetur, & habetur factus.* 15.d.7.

Unitas nil multiplicat: semel 1, semel 2, semel 3, est 1, 2, 3, quamvis plus sit addita. Nam 1 & 1, sunt 2, item 1 & 2, sunt 3: At 2 sibi additus est 4, quot item efficit sui multiplicatione. Nam bis bina sunt item 4. Id in illis est proprium: At 2 cæteros numeros multiplicans, auget, ut bis 3, sunt 6. Sic addis 3 bis quoties nempe unitas in 2 multiplicante continetur: bis 4, sunt 8: addis enim 4 bis quoties unitas in 2 multiplicante continetur. Et hæc prima multiplicationis species, duplicatio dicitur: cujus tamen ars eadem, quæ reliquarum multiplicationum: bis quina sunt 10, sic notabis,

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{2} \\ 10 \end{array}$$

8. *Si duo numeri fuerint facti á duob⁹ inter se multiplicatis, erũt æquales.* 16.p.7.

Ut quater quina, sunt 20, & quinquies quaterna, sunt item 20.

9. *Si numerus fuerit factus á duobus*

totis, erit æqualis factis ex altero toto & segmentis reliqui. 1.*p*.2.

Ut septies octona, sunt 56. hic factus est numerus é duobus totis 7 & 8. Seca 8 in 4 & 4, & utrumque segmentum multiplica per 7, facies 28 & 28, é quibus additis, restitues 56. Ergo major multiplicatio hujusmodi proponatur, & quæratur, quis numerus efficiatur 456 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum ut in additione procedes, & multiplicãtem duces per tres multiplicandi notas sigillatim, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus multiplicationem totius cum toto absolves, numeris ita dispositis sic incipies,

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \end{array}$$

Quater 6 sunt 24: notabis igitur 4, & 20 reservabis pro 2 loci sequentis: quater 5 sunt 20, & 2 reservata sunt 22, notabis 2, reservabis iterum 2 in locum proximum: quater 4 sunt 16 & 2 reservata sunt 18, quæ notabis integra. Inductionis summa sic erit.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 4 \\ \hline 1824 \end{array}$$

Unde invenies 456 per 4 multiplicatis fieri 1824. Hic multiplicasti per 4 totum multiplicatorem, tria segmenta multiplicandi, tanquam separatim multiplicasses 6 per 4, & fecisses 24:

Deinde

Deinde 50 per 4,& fecisses 200. Denique 400 per 4,& fecisses 1600, postremó tres factos singulares addidisses,hoc modo,

1600
200
24
1824

tantumque fecisti, ac si totum hoc 456, per totum 4 uná multiplicasses.

10. *Si numerus fuerit factus á duobus totis, erit æqualis factis é segmentis utriusque.1.p.7.*

Ut 72 est factus é totis 8 & 9, frangatur uterque in quotlibet segmenta; ut 8 in 3 & 5, 9 in 2 & 7, & singula per singula multiplica, facies 35. 10. 21. 6. é quibus additis restitues 72. Sed proponatur exemplum pauló plenius,& per ista segmenta tum multiplicandi, tum multiplicantis multiplicatio inducatur: ut 2070 per 204 multiplicentur, singularis inductio segmentorum;componet tandem 422280. Inductionis summa sic erit.

2070
204
8280
0000
4140
422280

Quo in exẽplo, ficut in cæteris omnibus circulus per circulum, aut circulus per numerũ nihil efficit. Circulus itaque pro inventione talis multiplicationis, notabitur ad ſequentes notas augendum.

Numeros in circulum deſinẽtes multiplicare compendio poſſumus, detractis ultimis circulis: Deinde iiſdem facto poſtpoſitis: ut ſi multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omiſſis circulis illic duobus, hic uno multiplicabis 7 2 per 4 5, & facto 3 2 4, poſtpones tres circulos, hoc modo, 324000.

Cap. 5. de diviſione.

11. *Diviſio eſt numeratio conjuncta, qua diviſor ſubducitur á dividendo quoties poteſt, & habetur quotus.*

Sic diviſio 1 2 in 3 eſt ſubductio 3 quater iterata, & habetur 4, pro quoto. Dividendus igitur numerus, eſt tanquam hæreditas dividenda: diviſor eſt numerus partium, velut hæredum, quibus ex æquo dividatur, quotus eſt pars quota hæredis cujuſque.

12. *Numerus minor eſt pars majoris aut partes. 4. p. 7.*

13. *Pars quæ dividit majorem. 3. d7.*

Ut 3 eſt pars 1 2, nempe quarta.

14. Par-

14. *Partes quando nõ dividit majorẽ.*
4. d.7. Ut 8 non dividit totum 12. Nam cúm semel subduxeris, manent 4. Itaque 8 sunt duæ quartæ duodenarii. Pars illa quota, hæc quanta vulgó dicitur.

15. *Si numerus in numerũ fuerit divisus, quot⁹ erit pars cognominis divisori.* 39.p.7

Ut 12 dividitur in 3, & quotus 4 est tertia pars divisi.

16. *Et si numerus habuerit partẽ quãlibet, dividetur in numerum parti cognominem.* 40.p.7.

Ut 12 habet tertiam partem, & ideó dividitur in 3. Quotus autem ille divisori cognominis adnotatur ad latus. Sic 18 divisis in 2, quotus erit 9, hoc modo,

18 (9
2

Et hæc prima in 2 divisio dicitur dimidiatio, cujus tamen ars eadem est quæ divisionis in 3 4, & quemlibet alium numerum. Si divisio tota simul expediri non possit, inductione est utendũ, & quidem dextrorsúm, ut in subductione. Exẽplum sit primum de divisore simplici. Dividantur 7476 per 6. Notabis primúm dividendum & divisorem sic,

7 4 7 6
6

E 7 potes ſubducere 6 ſemel,& manet 1. notabis igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo & 6 diviſore, ſuperſcribes 1. Prima inductio ſic erit,

1
7 4 7 6 (1
6

Secũdó produces 6 diviſorem in proximum locum. Jam 6 potes ſubducere bis á 14, & manent 2. Adnotabis igitur quotum 2, & deletis 6 & 14, ſuperſcribes 2 reliquum. Secunda inductio ſic erit,

1 2
7 4 7 6 (12
6 6

Tertió produces 6 diviſorem in proximum locum 27. unde potes ſubducere quater,& manẽt 3. Adnotabis igitur quotum 4, & deletis 27 & 6, ſuperſcribes 3. Tertia inductio ſic erit,

1 2 3
7 4 7 6 (124
6 6 6

Poſtremó produces in reliquum locum 36, vnde potes ſubducere ſexies,& nihil manet. Adnotabis igitur 6 quotum, deletis 36 & 6. Tota inductio ſic erit,

1 2 3
7 4 7 6 (1246
6 6 6 6

Hic invenis 7476 in 6 diviſis quotum eſſe
12346

1246: Exemplum deinde sit de divisore multiplici, qui per partes suas æqualiter subducendus sit á suprapositis diuidendi notis, quoties nempe quotus continetur. Et hic subductio vera, de qua dixi, plané cernitur, cúm subducere incipias dextrorsum singulas subducendi notas anté meditando, quám quidquã de parte quota statuas. Dividantur igitur 144 per 12: Notabis primúm dividendum & divisorem sic,

1 4 4
1 2

Ac videbis 1 ab 1 semel subduci, & toties 2 á 4, & 2 restabunt: adnotabis igitur 1 pro quoto, & deletis 14 & 12, superscribes 2. Inductio prima sic erit,

2
~~1~~ ~~4~~ 4 (1
~~1~~ ~~2~~

Secundó produces divisorem in proximum locum 24, ac videbis á 2 bis subduci posse: & 2 á 4 toties, neque quicquam restare. Inductio tota sic erit,

~~2~~
~~1~~ ~~4~~ ~~4~~ (12
~~1~~ ~~2~~ ~~2~~
~~1~~

In prima inductione hujus exempli, secunda divisoris nota sæpiús subduci poterit, quám prima. Sit exemplum ubi prima sæpiús subduci possit quám secũda, & quidem divisor sit majorum

notarum, ubi etiam multiplices istæ subductiones multiplicatione quoti per diuisorem totum, præsidio memoriæ tutiús recolligentur, quám expedirentur sepatatim singulæ. Dividātur 8 4 1, per 2 9. Notabis primó dividendum & divisorem sic,

8 4 1
2 9

Ac videbis 2 ab 8 quater quidem subduci posse. At toties 9 á 4 subduci non posse. Potes etiam 2 ter subducere ab 8, sed á reliquis 2 4 non potes toties subducere 9. Subduces igitur, ut æqualitas subductionis in partibus divisoris obseruetur, 2 ab 8 tantúm bis, & à reliquis 4 4 1 toties subduces 9, & manebunt 2 6. Adnotabis igitur 2 pro quoto, & per eum multiplicato divisore, recolliges in vnū, quod ista multiplicis subductionis æquatione comprehendisti, & facies 5 8, quæ deleto divisore, superscribes dividendo, & ab eo subduces, manebunt 2 6, quæ subducendo 5 8, & supraposito 8 4. deletis, superscribētur. Inductio prima sic erit,

2 6
8 4 1 (2
2 9
5 8

Secundó produces divisorem in reliquum dividendi locum. Sic potes 2 subducere tredecies á supraposito dividendo 2 6. Verúm ab uno reli-

reliquo non potes ſubducere 9 toties. Nec omnino fieri poteſt, ut nota diviſoris ulla, in ulla diviſione pluſquã novies hac inductionis via ſubducatur: quia major numerus quã 9 unica nota & unico loco comprehendi non poteſt. Cúm verò 2 á 26 novies ſubduxeris, á reliquis 81 poteris ſubducere 9 toties. Adnotabis igitur 9 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, facies 261, quæ deleto diviſore, ſubſcribes dividendo, ab eoque ſubduces, deletis infrá ſupraq; numeris, tum ſubductis, tum inde facta ſubductio eſt, nihil reſtabit. Tota inductio ſic erit,

2 6
8 4 1 (29
2 9 9
5 8 1
2
2 6

Si contingat diviſorem aliquo poſt primum loco majorem eſſe dividendo, circulus in quoto adnotetur: ſic diviſis 60800 per 304, quotus eſt 200, & primo tantúm loco diviſor ſubducitur. Quód ſi in relictis medio ſpacio vacuus locus offendatur, circulus videlicet aſcribendus erit, quod accidet, ſi dividas 364 in 26, ubi quotus erit 14. ſic,

1 0
3 6 4 (14
2 6 6
2

Cap. 6. de numeratione partium.

Si peracta tota divisionis inductione aliquid é dividendo relinquatur, propositus numerus nó est proprié divisus, sed numerus, qui divisione est omninó subductus, reliquorũ autem est sua quædam numeratio.

17 *Dividendus minor divisori majori interjecta linea superponitur, illeque numerus, hic nomen appellatur.*

Ut si 5 diviseris in 2, quotus erit 2, & reliquum unum nominabitur una secunda, & ita notabitur $\frac{1}{2}$: item divisis 11 in 3, quotus erit 3, & reliquum duæ tertiæ, sic $\frac{2}{3}$, atque ita reliquarum partium numerus erit ipsum reliquum, nomen veró divisor.

18. *Quantum numerus partium abest á nomine, tot unius integri partes dividẽdo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur.*

Ut in $\frac{4}{12}$ desunt $\frac{8}{12}$.

19. *Si numerus sit æqualis nomini, totus est, si major, plus toto, si minor, minus.*

Ut $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$.

20. *Pars autem major est, cujus nomen*

est

est minus, minor, cujus nomen est majus.

Ut $\frac{1}{2}$ major quám $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, & sic in cœteris. Est etiam in particulis & partibus partium sua quædam distincta notatio, & earum minima notatur, ut partes reliquæ nulla interjecta linea. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius secũdæ, ita notabuntur $\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$.

21. *Partium cognominum numeratio, spectat solos numeros.*

Sic igitur adde $\frac{4}{2}$ ad $\frac{6}{2}$, totæ erunt $\frac{10}{2}$. A $\frac{18}{2}$ subducito $\frac{4}{2}$, manebũt $\frac{6}{2}$. Sic in $\frac{3}{2}$ divisis $\frac{12}{2}$, quotus est 4. Item in $\frac{8}{2}$ divisis $\frac{32}{2}$, quotus est 4, unde intelligis partientem partem in partita quater integré contineri.

Multiplicatio autem multiplicat numeros simul & nomina, sive eadem sive diversa: quia multiplicandæ partes toties addẽdæ sunt, quot partes in multiplicantibus continẽtur. Sic $\frac{3}{5}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{15}{45}$. Sic $\frac{2}{7}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{10}{63}$.

Sed aliquandó integri & partium permista numeratio est, ut integer per partes, vel integer cum partibus per integrum solum, vel per integrum cum partibus expediri debeat.

Additio nihil mutat: 2 & $\frac{2}{3}$ sunt $2\frac{2}{3}$, 2 & $\frac{2}{3}$ cũ 2, sunt $4\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$, & $4\frac{2}{3}$, sunt $7\frac{1}{3}$.

Subductio ex integris capit unũ pro tot partibus, quantum est nomen: ut á duobus subducito $\frac{2}{3}$ é 2 sumes 1 pro $\frac{3}{3}$, á $\frac{3}{3}$ subduces $\frac{2}{3}$, tum é 2

manebit 1 $\frac{1}{3}$, á $\frac{9}{3}$ tolle 2 $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. A 2 $\frac{1}{3}$ tolle 1 $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$.

Multiplicatio integrum per partes multiplicat, ſubjiciendo integro tanquam numero 1 pro nomine ſic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$, id eſt 2.

Integer veró cum partibus per integrum ſolúm, vel cum partibus multiplicari poteſt ſeparatim. ſic 7 $\frac{1}{6}$ per 2, facit 14 $\frac{2}{6}$. Sic 7 $\frac{1}{2}$ per 2 $\frac{1}{3}$, faciunt primó 14 $\frac{2}{2}$, id eſt 15: deinde $\frac{7}{3}$ & $\frac{1}{6}$, id eſt 2 $\frac{1}{2}$, quibus additis totus eſt 17 $\frac{1}{2}$.

In diviſione idem fieri poteſt, ut ſi dividas 5 $\frac{1}{3}$ in 2 $\frac{2}{3}$, ſubducere potes 2 á 5 bis: item ab 1 reliquo & $\frac{1}{3}$, id eſt á $\frac{4}{3}$, potes ſubducere toties $\frac{2}{3}$. Sed ejuſmodi exempla in multiplicatione & diviſione rara erunt, in quibus partes expediri poſſunt abſque reductione, de qua poſteá, ſicuti de reliqua partium inventione in nominibus diverſis.

Cap. 7. de primis & factis numeris.

Atque hæc numeratio communis eſt, unde differentia numeri triplex oritur, prima numerus dicitur primus aut factus.

22. *Primus eſt numerus individuus ab alio numero.* 11.*d*.7.

Ut 2, 3, 5, 7. Si enim numeri á nullo alio numero dividi poſſunt, nec ideo facti ſunt ab alio numero.

23. *Factus eſt numerus dividuus ab alio*

lio numero. 13. d. 7.

Ut 4 dividitur á 2, 6 á 3, 8 á 4. Itaque factus numerus fit multiplicatione veri numeri per verum numerum.

24. *Si numerus fuerit factus, erit dividuus ab aliquo primo. 33. p. 7.*

Ut 6 factus, est dividuus á 3 primo.

25. *Si factus á duobus datis sit dividuus á primo, alter datorum erit dividuus ab eodem. 32. p. 7.*

Ut 48 factus ab 8 & 6, est dividuus á 3, á quo & 6 etiam dividuus est. Primus & factus numerus ejusmodi sunt, sed alia ex his partitio cōponitur primorum inter se & factorum inter se.

26. *Primi inter se sunt numeri ab unitate sola dividui cōmuni divisore. 12. d. 7.*

Ut 2 & 3. Utrum autem numeri dati primi sint inter se, cognoscitur subductione & divisione.

26 *Si duobus numeris inæqualibus datis, vicissim subducto semper minore á majore quoties poterit, sola unitas reliqua diviserit antecedentem, dati erunt primi inter se. 1. p. 7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se: quia subducto minore 2 á majore 3, sola est unitas, quæ præcedentem dividat. Sic in 8 & 9. Sed in majore numerorum differentia idem subductione multiplici & divisione multó promptiús expedietur, ut in 27 & 8. Nam prima divisio 27 in 8, relinquet tantúm 3: secunda divisio 8 in 3 relinquet 2. tertia 3 in 2, relinquet unitatem solam, & rem conficiet. Si de tribus aut compluribus quæstio sit, primi sint inter se, necne, cúm de duobus exploratum fuerit, constat hos duos ad quoscunq; alios fore primos, quia eorum præter unitaté divisor communis nullus erit.

28. *Si numerus primus non diviserit datum numerum, erit primus ad eum. 31.p.7.*

Sic 3 est primus ad 5.

29. *Si numerus diviserit alterum duorum inter se primorum, erit primus ad reliquum. 25.p.7.*

Ut 6 & 5 sunt primi inter se, & 3 dividens ipsum 6 est primus ad reliquum 5. Atque ita dati primi inter se numeri cognoscuntur subductione & divisione Inueniuntur autem & procreantur additione & multiplicatione, additione primúm.

30. *Si duo dati numeri fuerint primi inter se, & totus é datis erit primus ad utrumque:*

trumque: Et si totus è datis fuerit primus ad alterũ, dati erunt inter se primi. 30. p. 7.

Ut 8 & 9 sunt inter se primi, & totus ex iis 17 est primus ad 8 & primus ad 9: & contrá, quia totus 17 est primus ad 8, vel ad 9: ideó dati 8 & 9 sunt primi inter se: Multiplicationis inventio copiosior est.

31. *Si duo numeri sigillatim fuerint primi ad aliquem factus ab iis erit primus ad eundem. 26. p. 7.*

Ut 4 & 5 sunt primi sigillatim ad 9, & 20 factus ab iis est primus ad 9.

32. *Si duo numeri fuerint primi inter se, factus ab altero erit primus ad reliquum. 27. p. 7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se, & 4 factus á 2 est primus ad 3.

33. *Si duo numeri ad duos numeros sigillatim fuerint primi, facti ab iis erunt primi inter se. 28. p. 7.*

Ut 8 & 9 sunt sigillatim primi ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5: item 9 ad 7 & 5. Itaque 72 & 35 ab iis facti, sunt primi inter se.

34 *Si duo numeri fuerint primi inter*

ſe, facti ab iis erunt primi inter ſe, & facti á datis per poſtremos factos deinceps perpetuó primi erunt,

Ut in hoc ordine,	2	4	8	16	32
	3	9	27	81	243

35. *Facti inter ſe ſunt numeri dividui ab aliquo numero cõmuni diviſore.* 14.d.7.

Ut 4 & 6 facti ſunt inter ſe, quia 2 eſt illis communis diviſor. Duo autem hic quæruntur, maximus diviſor & minimus diviſus.

36. *Si duobus numeris datis inæqualibus factis inter ſe, minor ſubducatur viciſsim á majore quoties poterit, primus reliquus dividens antecedentem, erit maximus communis diviſor datorum.* 2.p.7.

Ut in 4 & 6, ſubducatur 4 minor á majore 6, reliquus 2 dividet antecedentem 4. Itaque 2 eſt maximus communis datorum diviſor. Sic in 21 & 15, ſubducto viciſſim 15 á 21, & 6 reliquo á 15, tandem relinquetur 3 communis menſura.

37. *Qua via duorum maximus communis diviſor inventus eſt, eadem trium & quamlibet multorum invenietur.* 3.p.7.

Nam cum præcedentium duorum maximus com-

communis divisor repertus fuerit, ipsius & sequentis numeri divisor similiter inquirendus est, ut in 8, 6, 4, maximus cõmunis divisor 8 & 6 est 2, tum maximus cõmunis divisor 2 & 4 est iterũ 2. Ergo 2 est maximus cõmunis divisor in 8, 6, 4: sic in 12, 8, 6, maximus cõmunis divisor est itẽ 2. Sic in 6, 12, 18, 24, maximus communis divisor est 6. Hic compendium est.

38 *Si numerus minor diviserit majorẽ, erit maximus communis divisor utriusq;.*

Ut 4 dividit 12, & est maximus divisor & sui et 12. E doctrina maximi divisoris sequitur per oppositum doctrina divisi minimi.

29. *Si numerus fuerit factus ab altero datorum per alterius divisorem cognominem maximo communi divisori, erit minimus divisus á datis. 36. p. 7.*

Sic minimus divisus á 12 et 8 est 24. Nam si diviseris 12 et 8 per 4 maximum divisorem, habebis cognominem partem in altero 3, in altero 2. Jam multiplica alterné vel 12 per 2, vel 8 per 3, habebis 24. Exemplum sic est,

24
12 X 8
4) 3 X 2

40. *Si duo numeri diviserint aliquẽ, mi*

E 7 potes ſubducere 6 ſemel, & manet 1. notabis igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo & 6 diviſore, ſuperſcribes 1. Prima inductio ſic erit,

~~1~~
~~7~~ 4 7 6 (1
~~6~~

Secũdó produces 6 diviſorem in proximum locum. Jam 6 potes ſubducere bis á 14, & manent 2. Adnotabis igitur quotum 2, & deletis 6 & 14, ſuperſcribes 2 reliquum. Secunda inductio ſic erit,

~~1~~ 2
~~7~~ ~~4~~ 7 6 (12
~~6~~ ~~6~~

Tertió produces 6 diviſorem in proximum locum 27. unde potes ſubducere quater, & manẽt 3. Adnotabis igitur quotum 4, & deletis 27 & 6, ſuperſcribes 3. Tertia inductio ſic erit,

~~1~~ ~~2~~ 3
~~7~~ ~~4~~ ~~7~~ 6 (124
~~6~~ ~~6~~ ~~6~~

Poſtremó produces in reliquum locum 36, vnde potes ſubducere ſexies, & nihil manet. Adnotabis igitur 6 quotum, deletis 36 & 6. Tota inductio ſic erit,

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~
~~7~~ ~~4~~ ~~7~~ ~~6~~ (1246
~~6~~ ~~6~~ ~~6~~ ~~6~~

Hic invenis 7476 in 6 diviſis quotum eſſe 12346

1246: Exemplum deinde sit de divisore multiplici, qui per partes suas æqualiter subducendus sit à suprapositis diuidendi notis, quoties nempe quotus continetur. Et hic subductio vera, de qua dixi, plané cernitur, cúm subducere incipias dextrorsum singulas subducendi notas anté meditando, quám quidquã de parte quota statuas. Dividantur igitur 144 per 12: Notabis primúm dividendum & divisorem sic,

1 4 4
1 2

Ac videbis 1 ab 1 semel subduci, & toties 2 á 4, & 2 restabunt: adnotabis igitur 1 pro quoto, & deletis 14 & 12, superscribes 2. Inductio prima sic erit,

2
~~1~~ ~~4~~ 4 (1
~~1~~ ~~2~~

Secundó produces divisorem in proximum locum 24, ac videbis á 2 bis subduci posse: & 2 á 4 toties, neque quicquam restare. Inductio tota sic erit,

~~2~~
~~1~~ ~~4~~ ~~4~~ (12
~~1~~ ~~2~~ ~~2~~
~~1~~

In prima inductione hujus exempli, secunda divisoris nota sæpiús subduci poterit, quám prima. Sit exemplum ubi prima sæpiús subduci possit quám secũda, & quidem divisor sit majorum

notarum, ubi etiam multiplices istæ ſubductiones multiplicatione quoti per diuiſorem totum, præſidio memoriæ tutiús recolligentur, quám expedirentur ſepatatim ſingulæ. Dividātur 8 4 1, per 2 9. Notabis primó dividendum & diviſorem ſic,

8 4 1
2 9

Ac videbis 2 ab 8 quater quidem ſubduci poſſe. At toties 9 á 4 ſubduci non poſſe. Potes etiam 2 ter ſubducere ab 8, ſed á reliquis 2 4 non potes toties ſubducere 9. Subduces igitur, ut æqualitas ſubductionis in partibus diviſoris obſeruetur, 2 ab 8 tantúm bis, & á reliquis 4 4 1 toties ſubduces 9, & manebunt 2 6. Adnotabis igitur 2 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, recolliges in vnū, quod iſta multiplicis ſubductionis æquatione comprehendiſti, & facies 5 8, quæ deleto diviſore, ſuperſcribes dividendo, & ab eo ſubduces, manebunt 2 6, quæ ſubducendo 5 8, & ſuprapoſito 8 4. deletis, ſuperſcribētur. Inductio prima ſic erit,

2 6
8 4 1 (2
2 9
5 8

Secundó produces diviſorem in reliquum dividendi locum. Sic potes 2 ſubducere tredecies á ſuprapoſito dividendo 2 6. Verúm ab uno

reli-

reliquo non potes ſubducere 9 toties. Nec omnino fieri poteſt, ut nota diviſoris ulla, in ulla diviſione pluſquã novies hac inductionis via ſubducatur: quia major numerus quã 9 unica nota & unico loco comprehendi non poteſt. Cúm veró 2 á 26 novies ſubduxeris, á reliquis 81 poteris ſubducere 9 toties. Adnotabis igitur 9 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, facies 261, quæ deleto diviſore, ſubſcribes dividendo, ab eoque ſubduces, deletis infrá ſupraq; numeris, tum ſubductis, tum inde facta ſubductio eſt, nihil reſtabit. Tota inductio ſic erit,

```
2 6
8 4 1   (29
2 9 9
5 8 1
  2
2 6
```

Si contingat diviſorem aliquo poſt primum loco majorem eſſe dividendo, circulus in quoto adnotetur: ſic diviſis 60800 per 304, quotus eſt 200, & primo tantúm loco diviſor ſubducitur. Quód ſi in relictis medio ſpacio vacuus locus offendatur, circulus videlicet aſcribendus erit, quod accidet, ſi dividas 364 in 26, ubi quotus erit 14. ſic,

```
1 0
3 6 4   (14
2 6 6
  2
```

Si peracta tota divisionis inductione aliquid é dividendo relinquatur, propositus numerus nō est proprié divisus, sed numerus, qui divisione est omninó subductus, reliquorū autem est sua quædam numeratio.

17 *Dividendus minor divisori majori interjecta linea superponitur, illeque numerus, hic nomen appellatur.*

Ut si 5 diviseris in 2, quotus erit 2, & reliquum unum nominabitur una secunda, & ita notabitur $\frac{1}{2}$: item divisis 11 in 3, quotus erit 3, & reliquum duæ tertiæ, sic $\frac{2}{3}$, atque ita reliquarum partium numerus erit ipsum reliquum, nomen veró divisor.

18. *Quantum numerus partium abest á nomine, tot unius integri partes dividēdo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur.*

Ut in $\frac{4}{12}$ desunt $\frac{8}{12}$.

19. *Si numerus sit æqualis nomini, totus est, si major, plus toto, si minor, minus.*

Ut $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$.

20. *Pars autem major est, cujus nomen*

est

est minus, minor, cujus nomen est majus.

Ut $\frac{1}{2}$ major quám $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, & sic in cœteris. Est etiam in particulis & partibus partium sua quædam distincta notatio, & earum minima notatur, ut partes reliquæ nulla interjecta linea. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius secũdæ, ita notabuntur $\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$.

21. *Partium cognominum numeratio, spectat solos numeros.*

Sic igitur adde $\frac{4}{2}$ ad $\frac{6}{2}$, totæ erunt $\frac{10}{2}$. A $\frac{12}{2}$ subducito $\frac{4}{2}$, manebũt $\frac{6}{2}$. Sic in $\frac{3}{2}$ divisis $\frac{12}{2}$, quotus est 4. Item in $\frac{8}{2}$ divisis $\frac{32}{2}$, quotus est 4, unde intelligis partientem partem in partita quater integré contineri.

Multiplicatio autem multiplicat numeros simul & nomina, sive eadem sive diversa: quia multiplicandæ partes toties addẽdæ sunt, quot partes in multiplicantibus continẽtur. Sic $\frac{3}{5}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{15}{45}$. Sic $\frac{2}{7}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{10}{63}$.

Sed aliquandó integri & partium permista numeratio est, ut integer per partes, vel integer cum partibus per integrum solum, vel per integrum cum partibus expediri debeat.

Additio nihil mutat: 2 & $\frac{2}{3}$ sunt $2\frac{2}{3}$, 2 & $\frac{2}{3}$ cũ 2, sunt $4\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$, & $4\frac{2}{3}$, sunt $7\frac{1}{3}$.

Subductio ex integris capit unũ pro tot partibus, quantum est nomen: ut á duobus subducito $\frac{2}{3}$ é 2 sumes 1 pro $\frac{3}{3}$, á $\frac{3}{3}$ subduces $\frac{2}{3}$, tum é 2

manebit $1\frac{1}{3}$, á $\frac{9}{3}$ tolle $2\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. A $2\frac{1}{3}$ tolle $1\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$.

Multiplicatio integrum per partes multiplicat, ſubjiciendo integro tanquam numero 1 pro nomine ſic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$, id eſt 2.

Integer veró cum partibus per integrum ſolúm, vel cum partibus multiplicari poteſt ſeparatim. ſic $7\frac{1}{6}$ per 2, facit $14\frac{2}{6}$. Sic $7\frac{1}{2}$ per $2\frac{1}{3}$, faciunt primó $14\frac{2}{2}$, id eſt 15: deinde $\frac{7}{3}$ & $\frac{1}{6}$, id eſt $2\frac{1}{2}$, quibus additis totus eſt $17\frac{1}{2}$.

In diviſione idem fieri poteſt, ut ſi dividas $5\frac{1}{3}$ in $2\frac{2}{3}$, ſubducere potes 2 á 5 bis: item ab 1 reliquo & $\frac{1}{3}$, id eſt á $\frac{4}{3}$, potes ſubducere toties $\frac{2}{3}$. Sed ejuſmodi exempla in multiplicatione & diviſione rara erunt, in quibus partes expediri poſſunt abſque reductione, de qua poſteá, ſicuti de reliqua partium inventione in nominibus diverſis.

Cap. 7. de primis & factis numeris.

Atque hæc numeratio communis eſt, unde differentia numeri triplex oritur, prima numerus dicitur primus aut factus.

22. *Primus eſt numerus individuus ab alio numero.* 11.*d*.7.

Ut 2, 3, 5, 7. Si enim numeri á nullo alio numero dividi poſſunt, nec ideo facti ſunt ab alio numero.

23. *Factus eſt numerus dividuus ab alio*

lio numero. 13.*d*.7.

Ut 4 dividitur á 2, 6 á 3, 8 á 4. Itaque factus numerus fit multiplicatione veri numeri per verum numerum.

24. *Si numerus fuerit factus, erit dividuus ab aliquo primo.* 33.*p*.7.

Ut 6 factus, est dividuus á 3 primo.

25. *Si factus á duobus datis sit dividuus á primo, alter datorum erit dividuus ab eodem.* 32.*p*.7.

Ut 48 factus ab 8 & 6, est dividuus á 3, á quo & 6 etiam dividuus est. Primus & factus numerus ejusmodi sunt, sed alia ex his partitio cōponitur primorum inter se & factorum inter se.

26. *Primi inter se sunt numeri ab unitate sola dividui cōmuni divisore.* 12.*d*.7.

Ut 2 & 3. Utrum autem numeri dati primi sint inter se, cognoscitur subductione & divisione.

26 *Si duobus numeris inæqualibus datis, vicissim subducto semper minore á majore quoties poterit, sola unitas reliqua diviserit antecedentem, dati erunt primi inter se.* 1.*p*.7.

Ut 2 & 3 ſunt primi inrer ſe: quia ſubducto minore 2 á majore 3, ſola,eſt unitas, quæ præcedentem dividat. Sic in 8 & 9. Sed in majore numerorum differentia idem ſubductione multiplici & diviſione multó promptiús expedietur, ut in 27 & 8. Nam prima diviſio 27 in 8, relinquet tantúm 3: ſecunda diviſio 8 in 3. relinquet 2. tertia 3 in 2, relinquet unitatem ſolam, & rem conficiet. Si de tribus aut compluribus quæſtio ſit, primi ſint inter ſe, necne, cúm de duobus exploratum fuerit, conſtat hos duos ad quoſcunq; alios fore primos, quia eorum præter unitatẽ diviſor communis nullus erit.

28. *Si numerus primus non diviſerit datum numerum, erit primus ad eum. 31. p. 7.*

Sic 3 eſt primus ad 5.

29. *Si numerus diviſerit alterum duorum inter ſe primorum, erit primus ad reliquum. 25. p. 7.*

Ut 6 & 5 ſunt primi inter ſe, & 3 dividens ipſum 6 eſt primus ad reliquum 5. Atque ita dati primi inter ſe numeri cognoſcuntur ſubductione & diviſione: Inueniuntur autem & procreantur additione & multiplicatione, additione primúm.

30. *Si duo dati numeri fuerint primi inter ſe, & totus é datis erit primus ad utrumque:*

trumque: Et si totus é datis fuerit primus ad alterũ, dati erunt inter se primi.30.p.7.

Ut 8 & 9 sunt inter se primi, & totus ex iis 17 est primus ad 8 & primus ad 9: & contrá, quia totus 17 est primus ad 8, vel ad 9: ideó dati 8 & 9 sunt primi inter se: Multiplicationis inventio copiosior est.

31. *Si duo numeri sigillatim fuerint primi ad aliquem factus ab iis erit primus ad eundem.26.p.7.*

Ut 4 & 5 sunt primi sigillatim ad 9, & 20 factus ab iis est primus ad 9.

32. *Si duo numeri fuerint primi inter se, factus ab altero erit primus ad reliquum.27.p.7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se, & 4 factus á 2 est primus ad 3.

33. *Si duo numeri ad duos numeros sigillatim fuerint primi, facti ab iis erunt primi inter se.28.p.7.*

Ut 8 & 9 sunt sigillatim primi ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5: item 9 ad 7 & 5. Itaque 72 & 35 ab iis facti, sunt primi inter se.

34 *Si duo numeri fuerint primi inter*

ſe, facti ab iis erunt primi inter ſe, & facti á datis per poſtremos factos deinceps perpetuó primi erunt,

Ut in hoc ordine,	2	4	8	16	32
	3	9	27	81	243

35. *Facti inter ſe ſunt numeri dividui ab aliquo numero cōmuni diviſore.* 14.d.7.

Ut 4 & 6 facti ſunt inter ſe, quia 2 eſt illis communis diviſor. Duo autem hic quæruntur, maximus diviſor & minimus diviſus.

36. *Si duobus numeris datis inæqualibus factis inter ſe, minor ſubducatur viciſsim á majore quoties poterit, primus reliquus dividens antecedentem, erit maximus communis diviſor datorum.* 2.p.7.

Ut in 4 & 6, ſubducatur 4 minor á majore 6, reliquus 2 dividet antecedentem 4. Itaque 2 eſt maximus communis datorum diviſor. Sic in 21 & 15, ſubducto viciſſim 15 á 21, & 6 reliquo á 15, tandem relinquetur 3 communis menſura.

37. *Qua via duorum maximus communis diviſor inventus eſt, eadem trium & quamlibet multorum invenietur.* 3.p.7.

Nam cum præcedentium duorum maximus com-

communis divisor repertus fuerit, ipsius & sequentis numeri divisor similiter inquirendus est, ut in 8, 6, 4, maximus cõmunis divisor 8 & 6 est 2, tum maximus cõmunis divisor 2 & 4 est itẽrũ 2. Ergo 2 est maximus cõmunis divisor in 8, 6, 4: sic in 12, 8, 6, maximus cõmunis divisor est itẽ 2. Sic in 6, 12, 18, 24, maximus communis divisor est 6. Hic compendium est.

38 *Si numerus minor diviserit majorẽ, erit maximus communis divisor utriusq;.*

Ut 4 dividit 12, & est maximus divisor & sui et 12. E doctrina maximi divisoris sequitur per oppositum doctrina divisi minimi.

29. *Si numerus fuerit factus ab altero datorum per alterius divisorem cognominem maximo communi divisori, erit minimus divisus á datis. 36. p. 7.*

Sic minimus divisus á 12 et 8 est 24. Nam si diviseris 12 et 8 per 4 maximum divisorem, habebis cognominem partem in altero 3, in altero 2. Jam multiplica alterné vel 12 per 2, vel 8 per 3, habebis 24. Exemplum sic est,

```
        24
    12  ╲╱  8
 4) 3   ╱╲  2
```

40. *Si duo numeri diviserint aliquẽ, mi*

8
4 ◡ 8
4) 1 X 2

Ergo hoc duplex compendium est é prima propositione inveniendi minimi divisi. Eadem via minimus á tribus aut quatuor aut quotlibet divisis invenietur.

38.*p*.7.

Quia repertus jam minimus divisus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem maximo communi divisori cognominem, est minimus ab iis divisus, sic minimus ab 8, 6, 4 divisus, est 24. Nam 24 est minimus divisus ab 8 & 6: rursum item minimus divisus est á 24 & á 4, ut é secundo consectario patet. Sic á 3, 4, 8 minimus divisus est 24, quia minimus divisus á 3 & 4 est 12, tum minimus divisus á 12 & 8, est 24. Sic minimus divisus á 2, 3, 4, 5 est 60. hinc sequitur,

43 *Si numerus fuerit minimus divisus á nominibus datarum partium, erit minimus qui habeat datas partes.* 41.*p*.7.

Ut minimus divisus qui habeat $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ est 12 népe minimus divisus á 2, 3, 4, quique minimus bifariam, trifariã quadrifariam dividi possit. Sic minimus qui habeat $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ est 60. nempe minimus divisus á 2, 3, 4, 5, quiq; in has partes mi-

nimus dividi possit.

Cap.8,de numeris paribus & imparibus.

Atque hæc de primis & factis numeris, secũda absoluti & simplicis numeri distributio est in numerum parem & imparem.

44. *Par est numerus dividuus á binario.6.d.7.*

Sic 2 ipse par,quia dividitur á seipso semel,sic 4 est par,quia dividitur á 2 bis.

45. *Impar est numerus individuus á binario.7,d.7.*

Ut 3.itaque.

46. *Impar unitate differt á pari.*

Sic 5, sic 7, & similes sunt impares numeri, quibus unitate subducta,pares erunt 4,6.

Par est pariter par tantúm,pariter impar tantúm,pariter par simul,& pariter impar.

47. *Pariter par est numerus tantúm dividuus á pari per parem.8.d.7.*

Ut 8 pariter par est, quem 2 par dividit per 4 parem.

48. *Si numeri fuerint ab unitate continué duplicati; quilibet erit pariter par. 32.p.9.*

Ut

Ut 1, 2, 4, 8, 16, 33, 64.

49. *Pariter impar est numerus tantũ dividuus á pari per imparem.9.d.7.*

Ut 6,quem 2 par dividit per 3 imparem.

50. *Si numerus habuerit dimidium imparem,erit pariter impar tantúm.33.p.9.*

Ut 6, 10, 18, quia horum dimidia pars est impar, nempe 3, 5, 9.

51. *Pariter par simul & pariter impar, est numerus neque ab unitate duplicatus, neque dimidium habẽs imparem.34.p.9.*

Ut sunt 12, 20, 28: quia neque duplicati sunt ab unitate, ut 2, 4, 8, 16, neque dimidium habent imparem, cúm dimidii ipsorum 6, 10, 14, sint etiam pares. Impar est impar simpliciter vel impariter.

52. *Impar simpliciter, est numerus dividuus tantúm ab unitate per seipsum.*

Ut 3, 5, 7, & quilibet primus.

53. *Impariter autem impar est numerus dividus ab impari per imparẽ.10.d.7.*

Ut 15 impar dividitur in 3 imparem,secundum 5 imparem.

Itaque omnis impar impariter,est factus numerus.

Cap.9.de numero perfecto & imperfecto.

Additur ad duas simplices numeri distributiones tertia distributio in numerum perfectum & imperfectum.

54. *Perfectus numerus, est numerus partium toti æqualium.22.d.7.*

Ut senarii partes sunt 1, 2, 3, quæ additæ sunt æquales toti 6. Et hic unitas numerus est. Nam si pars, est etiam numerus numeri.

55. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus sit primus, & ab eo totidem continué duplicentur, quot anté fuerant, ultimus erit perfectus, reliqui partes perfecti.36.p.9.*

Ut hic,

1 2 | 3 6.

Adde 1 & 2, totus 3 est primus, & secundus ab eo continué duplicatus est 6 perfectus, cujus omnes partes sunt, 1, 2, 3, & solus est perfectus intra 10. Secundó, ut hic,

1 2 4 | 7 14 28.

Adde 1, 2, 4, sunt 7, & tertius ab eo continué duplicatus 28 est perfectus, eiusque partes omnes 1, 2, 4, 7, 14, & solus hic est perfectus â 10 ad 110. Tertió, ut hic,

1, 2, 4, 8, 16. | 31, 62, 124, 248, 496.

Adde

Adde 1, 2, 4, 8, totus eſt 15 compoſitus, prætereatur igitur. At 1, 2, 4, 8, 16 additis, totus eſt 31, primus, & quintus ab eo duplicatus 496 perfectus, eiuſque partes omnes ſunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496, ſolus hic perfectus eſt á 100 ad 1000, & ſic deinceps. Itaque ut perfectus ſolus neglectis partibus habeatur, hinc factũ eſt ab Euclide theorema in hanc ſententiam:

56. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus ſit primus, factus ab eo per ultimum erit perfectus.*

Sic deinceps á 1000 ad 10000 perfectus eſt 8128, rarique admodum ſunt hi numeri, imó nonnullis gradibus nulli ſunt, ut ſexto, undecimo, decimoſeptimo, & pleriſque aliis. Sic igitur perfectus efficitur é pariter paribus & ex imparibus primis, id eſt, ex maximé dividuis & minimé dividuis.

57. *Imperfectus numerus, eſt numerus partium toti inæqualium.*

Eſtque redundans aut diminutus.

58. *Redundans, eſt numerus imperfectus partium toto majorum.*

Ut 12, cujus partes 1, 2, 3, 4, 6 collectæ, ſunt 16 majores toto 12.

59. *Diminutus, eſt numerus imperfe-*

ctus partium toto minorum.

Ut 4, 8, & quilibet pariter par.

ARITHMETICÆ LIBER II.

Cap. I. de primis differentiis comparationis.

PRIMA pars Arithmeticæ adhuc fuit, secũda sequitur.

1. *Arithmeticæ pars secunda est, quæ interpretatur numerorum comparationes, comparationumque genera & proprietates.*

2 *Comparatio numerorum est habitudo quædam ipsorum inter se.*

Comparatio est ratio vel proportio.

3. *Ratio est comparatio quantitatis.* 3.*d*.5.

Rationis termini duo sunt, primus antecedens & dux, secundus consequens & comes appellatur. Quantitas autem æqualis est vel inæqualis, unde sunt axiomata sequentia.

4. *Si duo numeri fuerint æquales eidem,*

dem erunt æquales inter se.

Ut 2 & 2 sunt æquales eidem 2. Itaque sunt æquales inter se.

5. *Si numeri æquales addantur æqualibus, toti erunt æquales. 2. axio.*

Ut 2 & 2 sunt æquales numeri, adde utrique 3, toti erunt 5 & 5: item æquales inter se.

6 *Si æquales subducantur ab æqualibus, reliqui erunt æquales. 3. axio.*

Ut 5 & 5 sunt æquales numeri: ab utroque tolle 3, manebunt 2 & 2: item æquales inter se.

7. *Totus numerus major est sua parte. 9. ax. 1.*

8. *Si æquales addantur inæqualibus, toti erunt inæquales. 4. axio.*

Ut 4 & 3 sunt inæquales numeri, adde utrique 2, toti 5 & 6 sunt item inæquales.

9. *Si æquales subducantur ab inæqualibus, reliqui erunt inæquales. 5. ax.*

Ut 6 & 5 sunt inæquales numeri, tolle ab utroq; 2 & 2 æquales numeros, reliqui quatuor & 3 erunt item inæquales. Ratio est arithmetica vel geometrica.

10. *Ratio arithmetica, est comparatio*

in quantitate, qua numerus differt á numero.

Ut ratio arithmetica 2 cum 2 eſt æqualitatis, 2 cum 3 eſt differentia. 1, 2 cum 5 eſt differentia 3. Ideoque hæc ratio differentia dicitur.

Cap. 2. de numeratione rationum.

11 *Ratio geometrica eſt comparatio in quantitate, qua numerus eſt diviſus in numerum.*

Hic præcipué ratio dicitur: dum veró rationis termini ſcribũtur, dux ſuperné, comes inferné notatur ſic,

2	3	1
2	2	

12 *Datis rationis terminis, genus diviſione, datoque genere rationis, termini multiplicatione inveniuntur.*

Sic datis terminis 1 ad 1, 2 ad 2, ratio erit æqualitatis, quia æqualis æqualem ſemel dividit. Datis 4 ad 2, 6 ad 4, ratio erit inæqualitatis, illic dupla, hic ſexquialtera, quia comes illic ducem bis, hic ſemel dividit, & dimidium ſupereſt. Dederis contra genus rationis, nempe ex illis quotis (1 (2 (1 $\frac{1}{2}$. Si numerus ſit integer, habebis ducem,

ducem, cui 1 pro comite ſubjicies, ſin fractus ſit, multiplicabis integrum per nomen, factoque numerum partium ſimul addes, conſtitues ducem: comes autem ipſe in numero permanet, ut in poſtremo exemplo: multiplica 1 per 2, & facto 2 adde 1, conſtitues 3 pro duce, rationiſque termini erunt $\frac{3}{2}$.

13. *Rationum communis numeratio eſt tanquam terminorum, ideoque eadem eſt quæ partium, atque ideó ſi comites ſint iidem, ſoli duces ſpectantur, excepta multiplicatione, quæ tum duces, tum comites multiplicat.*

Sic è ratione dupla 4 ad 2 addita ad rationē triplam 6 ad 2, tota ratio eſt quintupla 10 ad 2. Sic ratione dupla 4 ad 2 ſubducta á ratione quintupla 10 ad 2, reliqua eſt ratio tripla 6 ad 2, exempla ita ſunt;

4	6	10	4	10	6
		item			
2	2	2	2	2	2

Sic ratio dupla 4 ad 2 multiplicans rationem triplam 6 ad 2, faciet rationē ſextuplam 24 ad 4. Sic ratio tripla 9 ad 3 multiplicata per rationem quadruplam 8 ad 2, faciet rationem duodecuplam 72 ad 6. Exempla ita ſunt.

4	6	24	item	9	8	72
2	2	4		3	2	6

Divide rationem duodecuplam 12 ad 1, in rationem triplam 3 ad 1, quotus erit 4, qui significat dividentem rationem quater in dividenda contineri, aut rationem quadruplam 4 ad 1 pro quota ratione inveniri: ſic ratio ſedecupla 32 ad 2 diviſa in rationem quadruplam 8 ad 2, relinquit quotam rationem quadruplam. Denique quotus hic eſt nomen quotæ rationis. Exempla ita ſunt,

3	12	4	item	8	12	4
1	1	1		2	2	1

14 *Si comites ſint diverſi, opus erit reductione, de qua ſuo loco.*

Ergo hæc numeratio communis eſt in additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione.

15 *Ratio inæqualitais reducitur ad rationem æqualitatis multiplicatione ſuæ converſæ.*

Ut ratio $\frac{2}{3}$ multiplicetur per rationem $\frac{3}{2}$, fiet ratio $\frac{6}{6}$, quæ eſt æqualitatis.

Cap. 3. de generibus rationis.

Ratio prima eſt aut conjuncta, prima multiplex

plex aut ſuperparticularis aut ſuperpartiens.

16 *Multiplex eſt, quando terminus major dividitur á minore.5.d.7.*

Sic omnis numerus multiplex eſt ad unitaté, ut 2 duplus,3 triplus,4 quadruplus, & ſic in infinitum. Sunt enim generis hujus reliquorumque ſpecies infinitæ. Atque hic antecedens eſt multiplex,ut duplus,triplus,quadruplus, quintuplus,ſextuplus. Cõſequens autem ſubmultiplex, ut ſubduplus,ſubtriplus,ſubquadrupl⁹,ſubquintuplus,ſubſextuplus. Hic etiam unitas numerus eſt, ſicuti ſæpe in tota comparationum doctrina. Species veró ſic notãtur,

2	3	4	5	6
1	1	1	1	1
dupla,	tripla,	quadrupla,	quintupla,	ſextupla.

Si ſubmultiplex multiplici contra compãretur, minoris inæqualitatis erit ratio, & ſubmultiplex dicetur,& antecedens minor erit,cõſequens major,ut in cœteris deinceps.Nomen ſiquidem rationis in minore qualibet inæqualitate,ſemper á majore termino capitur, addito, ſub: ſic igitur ſubmultiplicis ſpecies notantur,

1	1	1	1
2	3	4	5
Subdupla,	ſubtripla,	ſubquadrupla,	ſubquintupla

1
6
ſubſextupla.

Hæc prima inæqualitatis ratio, vera & propria divisione percipitur, reliquæ autem species imperfecta divisione cognoscũtur, perpetuoque pars aut partes relinquuntur.

17. *Superparticularis est, quando major dividitur semel á minore, & pars ejus superest.*

Si altera, sesquialtera dicitur, si tertia, sesquitertia, si quarta, sesquiquarta, si quinta, sexquiquinta, si sexta, sexquisexta, ut in subiectis exẽplis patet.

3	4	5	6
2	3	4	5

Sexquialtera, sesquitertia sesquiquarta, sesquiquinta.

7
6

Sesquisexta.

Ac si majores minoribus dividas, quoti speciem rationis & nomen subtiliús explicabunt, ut hic vides,

$1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{6}$.

Si minor majori in hac specie comparetur, ratio subsuperparticularis dicetur: res sic erit,

2
3
Subsesquialtera,

3
4
Subsesquitertia.

4
5
Subsesquiquarta,

5
6
Subsesquiquinta.

6
7
Subsesquisexta.

Ubi

Ubi quoti sunt prioribus similes.

18. *Superpartiens est, quando major dividitur semel á minore, & ejus partes aliquot supersunt.*

Si duæ, superbipartiens, si tres, supertripartiés, si quatuor, superquadripartiés, si quinque, superquintupartiens, si sex, supersextupartiens, & addimus præterea nomen partis á comite, tertias, quartas, quintas, sextas, septimas, si comes sit 3, 4, 5, 6, 7. Itaque nomen speciale duplex hic erit, alterum é numero, alterum é nomine partium, ut,

5	7	9
3	4	5
Superbipart. tert.	Supertripart. quart.	Superquadripar. quint.

11	13
6	7
Superquintupart. sext.	Supersextupart. sept.

Quorum quoti speciem indicantes sunt, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{4}{5}$, $1\frac{5}{6}$, $1\frac{6}{7}$. Si cõparetur in hoc tertio genere minor majori, superbipartiens dicitur, & contrario modo notatur, ut,

3	4
5	7
Subsuperbipart. tert.	Subsupertripart. quart.

5	6
9	11
Subſuperquadripart. quint.	Subperquintupart. ſext.

7
13
Subſuperſeptupart.
ſeptimas.

Conjuncta ratio eſt multiplex ſuperparticularis, aut multiplex ſuperpartiens.

19 *Multiplex ſuperparticularis eſt, quãdo major ſæpiús dividitur á minore, & ejus pars ſupereſt.*

Ut,

5	7
2	3
Dupla ſeſquialtera.	Duplaſeſquitertia.

9
4
Duplaſeſquiquarta.

Et ſic deinceps, ut, 11 ad 5, duplaſeſquiquinta, 13 ad 6, dupla ſeſquiſexta, quarum quoti ſunt,

$2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{6}$

Sic tripla ſuperparticularis.

7	10	13	16	19	22	25
2	3	4	5	6	7	8

Rationum quoti ſunt.

$3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$ | $3\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{1}{8}$.

At

At ſi contrá minor majori comparetur (ſub) utrique ſpeciali nomini præponendum: ut ratio $\frac{2}{5}$ eſt ſubdupla, ſubſeſquialtera, ratio $\frac{3}{7}$ eſt ſubdupla, ſubſeſquitertia, &c.

20. *Multiplex ſuperpartiens eſt, quādo major ſæpiús dividitur á minore, & ejus partes ſuperſunt.*

Ut,

8
3
Duplaſuperbipart. tert.

12
5
Duplaſuperbipar. quint.

16
7
Duplaſuperbipart. ſept.

20
9
Duplaſuperbipart. non.

24
11
Duplaſuperbipart. undec.

Quoti rationum.

$2\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{2}{9}$, $2\frac{2}{11}$.

Cap. 4. de primis differentiis proportionis.

Ratio adhuc fuit, ſequitur proportio.

21 *Portio eſt ſimilitudo rationum.*

Ejusque perinde valet inversio & alternatio.

22. *Proportionis inversio, est assumptio consequentis, velut antecedentis ad antecedentem velut consequẽtem.* 13.d.5.

Ut si dixeris, ut sunt 2 ad 4, sic 3 ad 6: Ergo, inquam, ut 3 ad 6, sic 2 ad 4: item ut 6 ad 3, sic 4 ad 2. Denique ut 4 ad 2. sic 6 ad 3, id ἀνάπαλιν est Euclidi.

23. *Proportionis alternatio est assumptio antecedentis ad antecedentem, & cõsequentis ad consequentem.* 11. & 12.d.5.

Ut si dixeris, ut 5 ad 10, sic 4 ad 8: ergo, inquam, ut 5 ad 4, sic 10 ad 8. Id ἐναλλὰξ est Euclidi. Proportio est disjuncta vel continua.

24 *Proportio disjuncta, est proportio terminorum disjunctorum.*

Ut 6 ad 12, sic 7 ad 14. hic termini quatuor sunt diversi.

25. *Proportio continua, est proportio ejusdem termini secundi & tertii.*

Ut 2 ad 4, sic 4 ad 8; hic duæ rationes uno termino continuantur.

Cap. 5. de proportione arithmetica disjuncta.

Proportio est arithmetica aut geometrica.

Propor-

26. *Proportio arithmetica, est similitudo differentiarum.*

Ut in 8, 6, 12, 10, utrobique enim est 2, pro differentia etiam inverso modo: ut enim 10 ad 12, sic 6 ad 8, vel ut 12 ad 10, sic 8 ad 6: una enim differentia 2 est. Item alterno modo, ut 8 ad 6, sic 12 ad 10. Ergo ut 8 ad 12, sic 6 ad 10. Proportionis arithmeticæ inventio varia est, prima est additionis.

27. *Si quatuor numeri sint arithmeticé proportionales, extremus simul uterque erit æqualis medio simul utrique.*

Ut in 2, 3, 4, 5: utrobique enim est 7. Sic in 12, 10, 6, 4: utrobique enim est 16. Secunda est multiplicationis.

28. *Si sint quatuor numeri arithmeticé proportionales, factus á mediis superabit factum ab extremis, facto á differentia maximi á medio, per differentiam ejusdem medii á minimo.*

Ut in 12, 10, 8, 6, factus ab extremis est 72, quem 80 factus á medio, superat 8, facto á 2, differentia primi supra medium, per 4 differentiam eiusdem medii á minimo. Sic in 12, 10, 4, 2, factus ab extremis est 24, quem 40, factus á me-

diis ſuperat 16, facto á 2 differentia primi á medio, per 8 differẽtiam eiuſdem medii á minimo, Termini tamen recté conſtituẽdi, ut medii ſint medii quantitate. Neque hîc dices ut 12 ad 8, ſic 16 ad 12, ſed vt 8 ad 12, ſic 12 ad 16.

Cap. 6. de proportione arithmetica continua, ejuſque progreſſione.

E diſjuncta proportione Arithmetica, affectio continué deducitur.

28. *Si ſint tres numeri arithmeticé proportionales, medius erit dimidius extremi ſimulutriuſque.*

Ut in 3, 5, 7. Nam 3 & 7 ſunt 10, quorum dimidius eſt 5. Hinc patet inventio medii arithmetici.

30. *Si ſint tres numeri arithmeticé proportionales, factus á medio, ſuperabit factum ab extremis facto á differentiis.*

Ut in 3, 6, 9, factus ab extremis eſt 27, quem 36 factus á medio, ſuperat 9 facto á differentiis 3 & 3.

31. *Proportionis arithmeticæ continuæ termini quantumlibet continuari poſſunt, & progreſſio arithmetica vulgó dicitur.*

In ea quæri ſolet terminorum differentia, numerus,

merus, primus, ultimus & summa, quæ datis tribus inveniuntur.

32. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in numerũ terminorum unitate minutum, quotus erit differentia.*

Ut progressionis quinque terminos habentis sunto primus & ultimus terminus 2 & 10, numerus autem terminorum 5, tolle igitur 2 primum á 10 ultimo, restant 8, quibus in quatuor numerum terminorum unitate minutum divisis, quotus erit 2 pro differentia, per quam á 2 primo termino invenies reliquos terminos 4, 6, 8, usque ad 10 ultimum, totaque progressio erit 2, 4, 6, 8, 10.

33. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in differentiam, quotus unitate auctus, erit numerus terminorum.*

Ut in eodem exemplo, tolle 2 á 10, manent 8, quibus divisis in 2 differentiam, quotus est 4, cui adde 1, habes 5 numerum terminorum.

34. *Si unitas fuerit subducta á numero terminorum, factusque á reliquo per differẽtiam subductus ab ultimo, reliquus erit primus.*

Ut in eodem exemplo, tolle 1 á 5 numero terminorum, & 4 reliquum multiplica per 2 differentiam, & factum 8 tolle á 10 ultimo, reliquus 2 est primus.

35. *Si unitas fuerit subducta á numero terminorum, factusque á reliquo per differentiã additus primo, totus erit ultimus:*

Ut in progressione, 2, 4, 6, 8. 10, numerus terminorum est 5, á quo tollatur 1, & per 4 numerũ terminorum unitate minutum, multiplica per 2 differentiam, & 8 facto adde 2 primum terminũ, totus erit 10 ultimus terminus progressionis.

36. *Si numerus fuerit factus ex additis extremis per dimidium numeri terminorum, vel á numero terminorum per dimidium additorum extremorum; erit summa progressionis.*

Ut in 2, 4, 6, 8, 10, 12, extremis additis 2 & 12, totus 14 per 3 dimidium multiplicatus, facit 42 summam quæsitam. Fac numerum terminorum imparem, ut in 2, 4, 6, 8, 10, extremis additis totus est 12, cujus dimidius 6 per 5 numerum terminorum multiplicatus, facit 30 summam.

Cap. 7. de proportione geometrica, deque invẽtione proportionalium & inæqualiũ.

Ad-

Adhuc proportio arithmetica fuit, geometrica ſequitur.

37. *Proportio geometrica eſt ſimilitudo rationum.4.d.5.*

Hic proprié proportio dicitur.

38. *Proportionales ſunt, qui habent eandem rationem.7.d.5.*

Veluti 9 ad 3, ſicuti 12 ad 4, ratio utrobique eſt tripla, ideoque 9, 3, 12, 4, ſunt proportionales.

39. *Si numeri fuerint æquales, erunt proportionales ad eundem, & idem erit proportionalis ad æquales.7.p.5.*

40. *Et ſi numeri fuerint proportionales ad eundem, erunt æquales, & ad quos idem fuerit proportionalis, & illi erunt æquales.9.p.5.*

Ut 2 & 2 ſunt proportionales ad 3: ut enim 2 ad 3, ſic 2 ad 3. itemque 3 ad 2, & 2 eſt proportionalis: ut enim 3 ad 2, ſic 3 ad 2, contraque 2 & 2 cúm ſint proportionales ad 3, ſunt æquales. Itẽ 2 & 2 æquales, ad quos 3 eſt proportionalis.

41. *Si duo numeri fuerint inæquales, major habebit ad eundem majorem rationem, quám minor, & idem ad minorem*

habebit majorem rationem quám ad majorem.8.p.5.

42. *Et ſi duo numeri habuerint ad eũdem rationem inæqualem, qui habuerit majorem, erit major, ad quẽ autem idem habuerit majorem rationem, erit minor.* 20.*p*.5.

Ut 3 & 4 ſunt inæquales, & 4 ad 2 majorem rationem habet, nempe duplam, quám 3 ad eundem, nempe ſeſquialteram: item 2 ad 3 majorem habet rationem, nempe ſeſquialteram, quám ad 4 ſubduplam. Conuerſum patet in eodem exemplo,

Cap. 8. de inventione proportionalium per multiplicationem, deq; reductione partium ad cognomines & proportionales.

43. *Minores æqué majoribus ſunt proportionales.* 15.*p*.5.

Ut 2 ad 4, ſic 3 ad 6. Antecédentes enim dimidii ſunt conſequentium: datis autem minoribus, majores proportionales inveniuntur multiplicatione.

44. *Si numerus numeros multiplicet,*

facti

facti erunt proportionales multiplicantibus.18.*p*.7.

Ut 2 multiplicet 3 & 4, facti erunt 6 & 8 proportionales multiplicatis 3 & 4. Item 3 & 4 multiplicent 2, facti iidem 6 & 8 erunt itidem proportionales multiplicantibus, 3 & 4, quia utrobique æqué majores sunt minoribus,

Reductio partium ad cognomines & proportionales é proximo multiplicationis theoremate deducitur, atq; ut proportionales ipsi addantur, subducantur, dividantur necessaria. Proportionales enim partes sunt eædem quãtumlibet terminis dissimiles, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$.

46. *Partium reductio ad cognomines & proportionales partes, est multiplicatio nominis & numeri per alterũ nomen.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplica 2 & 3 per 4, item 3 & 4 per 3, facies cognomines & proportionales partes $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ proportionales quidem, quia numerus idem duos multiplicavit: cognomines veró & æqualium nominum, quia sunt é duobus numeris inter se multiplicatis.

47. *Nomina reductione eadem facta, ad divisionem nihil attinent.*

Nam cúm reduxeris partes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties é $\frac{9}{12}$ subduci nihilo plus est quàm dicere 8 toties á 9. Itaque nominum inter

ſe multiplicatio hic in diviſione omittitur. At ſi ſeries reducendarũ partium longior fuerit, binæ reducẽdæ ſunt, ut in $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$, prima reductione atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{12}$: deinde cum $\frac{4}{5}$ reductæ ſunt $\frac{85}{90}$, $\frac{48}{60}$.

48. *Eadem via reductionis, cognoſcetur é binis partibus utræ ſint majores.*

Ut $\frac{5}{6}$ ſunt majores quám $\frac{3}{4}$, quia facta reductione habebis $\frac{20}{24}$ pro $\frac{5}{6}$: At habebis tantúm $\frac{18}{24}$ pro $\frac{3}{4}$.

49. *Eadem via termini rationum fracti ad integros proportionales redeunt, ſi numeri multiplicẽtur per nomen unarum partium.*

Sic $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ multiplicatæ per 4, redeunt ad $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{6}$, id eſt ad 2 & 2 integros, & eãdem rationem habentes quam habent $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{6}$. Si majores terminos proportionales requiras, multiplica rurſus $\frac{8}{4}$ & $\frac{12}{6}$ per nomen 4, facies $\frac{32}{4}$ & $\frac{48}{6}$, id eſt, 8 & 8, vel multiplica per 6, facies $\frac{48}{4}$ $\frac{72}{6}$, id eſt 12 & 12 integros proportionales datis fractis $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$.

Idem erit, ſi cum integris fracti miſceantur, ut ſi pro 3 $\frac{1}{3}$ & 4 $\frac{1}{3}$ quærantur integri proportionales, multiplicabis 3 $\frac{1}{2}$ per 2, facies 7: deinde multiplicabis 4 $\frac{1}{3}$ per idem nomen, facies 8 $\frac{2}{3}$, neque dum habes ambos integros, ſed alterum tantúm, Eadem itaque via quæratur alter: igitur

per

per reliquum nomen 3, multiplica 8 $\frac{2}{3}$, facies 24 & $\frac{6}{3}$, unde colliges 26, tandemque habebis 21 & 26 integros proportionales 3 $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{1}{3}$.

Cap. 9. de inventione proportionalium per divisionem, deque reductione ad minimos.

Datis verò majoribus numeris, minores inveniũtur regula divisionis per contrariam é lege multiplicationis deducta.

50. *Si numerus diviserit numeros, quoti erunt proportionales divisis.*

Ut 2 dividat 8 & 6, quoti 4 & 3, erunt proportionales divisis 8 & 6: At 4 & 3 dividant 24, quoti 6 & 8, erunt proportionales divisis, sed contrario genere inæqualitatis. Non enim ut 4 ad 3, sic 6 ad 8, illic enim est ratio sesquitertia, hic sesquialtera, sed ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. proportionales fiunt divisione non solùm minores divisis, sed minimi proportionalium.

51. *Si numeri fuerint minimi proportionalium, erunt primi inter se.* 23.p.7.

52. *Et si fuerint primi inter se, erunt minimi proportionalium.* 24.p.7.

Ut 3 & 2 sunt primi & minimi sesquialterorum, & quia sunt minimi proportionalium, ic-

circó ſunt primi.

53. *Si maximus communis diviſor diviſerit datos, quoti erunt minimi proportionales datis. 35.p.7.*

Ut hic,

8 12
4)
2 3

4 maximus diviſor cúm diviſerit 8 & 12, quoti 2 & 3 erũt proportionales minimi, unde etiam ſequitur.

54. *Si duo numeri fuerint minimi proportionalium, divident ſibi proportionales æqualiter, major majorem, & minor minorem. 21.p.7.*

Ut patet in eodem exemplo: 3 dividit ipſum 12 quater, & 2 dividit ipſum 8 toties. Habet autem iſta ad minimos reductio uſum tam neceſſarium, quám eſt facile pares numeros præ magnis numerare. Itaque providendum ſemper eſt, ut primi numeri & minimi perpetuó proponantur, aut ſi compoſiti dati ſint, protinús reducantur ad minimos per maximum communem diviſorem. Serviet etiam ſuperiori proportionalium reductioni reductio ad minimos terminos, ut poſtea reductorum terminorũ alia reductio prolixior evitetur. Sed reductio iſta per ſpecies numerationis eſt etia quædam ſpecialis

55. *In additione & subductione minimus á nominibus divisus est assumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi alterné per partes cognomines.*

Ut hic vides,

6 4

$\frac{2}{3}$ × $\frac{4}{9}$ ubi pro $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{9}$ habes $\frac{6}{9}$, & $\frac{4}{9}$.

1 3

9

56 *In multiplicatione numerus & nomen alterius reducuntur.*

Quia sunt multiplicatores, idemque est multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{6}$ per $\frac{5}{3}$. Itaque tanquam $\frac{2}{6}$ rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{10}{18}$, facies $\frac{5}{9}$.

57. *Si numerus nomini alterno fuerit æqualis, reliquus numerus reliquo nomini superpositus multiplicationem absolvit.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ omissis 3 & 3, habes $\frac{2}{4}$, id est, $\frac{1}{2}$. Quin si longa hic series fuerit, æqualibus omnibus omissis, reliquus numerus cum reliquo nomine multiplicationem absolvet, ut hic,

$\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, est $\frac{1}{9}$.

58. *In divisione numeri inter se, vel nomina inter se, vel utraque separatim re-*

ducuntur.

Ut si $\frac{4}{5}$ dividantur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, sumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{5}$, vel $1\frac{1}{5}$. Item si dividas $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{9}$, sumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{15}{8}$, vel $1\frac{7}{8}$. Item si $\frac{8}{27}$ per $\frac{4}{9}$, sumes & 2 pro 4, & 8 pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$.

Cap. 10. de regula aurea proportionis disjunctæ, & inde quarti proportionalis inventione.

Proportio est prima aut conjuncta.

59. *Proportio prima, est proportio disjuncta tantúm, aut continua tantúm.*

60. *Proportio disjuncta est, quando quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est tertii ad quartum.*

Ad proportionem disjunctam prima erit inventio quarti proportionalis per multiplicationem simul & divisionem, quæ inventio propter singularem excellentiam vulgó aurea regula nominatur.

61. *Si quatuor numeri sint proportionales, factus ab extremis erit æqualis facto á mediis: & si factus ab extremis sit æqualis facto á mediis, quatuor numeri erunt*

runt proportionales. 19.p.7.

Ut in 4, 2, 6, 3, factus 12 ab extremis 4 & 3, est æqualis 12 facto á mediis 2 & 6. Ideoque etiam numeri quatuor positi sunt proportionales. Hinc sequitur.

62. *Si datis tribus numeris primus diviserit factum á secundo & tertio, quotus erit quartus proportionalis. 19.p.9.*

Ut in 2, 4, 6, quartus proportionalis est 12.

63. *In hujus regulæ quæstionibus præcipué spectandus est ordo terminorum.*

Ut nempe primus primo loco sit, & cœteri suo. Itaque si confusiús, ut solet, quæratur, redigantur tamen in ordinem termini: Ut, quot horæ sunt in 6 diebus, cúm in 3 sint 72? Hic quæstio est tertii termini, quæstionisque proportio sic expedietur 3, 72, 6, 144.

64. *Si confundantur res heterogeneæ, reducendæ sunt priús ad idem genus.*

Ut si quæratur, hebdomada horas habet 168, dies 4 quot horas habent? Pro hebdomada ponantur 7 dies, & tum dic, 7 dies dant horas 168, 4 dies, quot horas dabunt? reperies 96.

65. *Si termini rationis comprehendantur dato nomine rationis, anté sunt explicandi.*

Ut ad quem numerum 12 eſt quintuplus? Pone pro primo & ſecundo termino terminos minimos quæſitæ rationis 5 & 1, & dicito, ut 5 ad 1, ſic 12 ad $2\frac{2}{5}$. Atque hoc modo cuilibet termino terminus rationalis, qua voles rationis ſpecie reperietur. Sic enim idem 12 ſeſquiquartus erit ad $9\frac{3}{5}$ ſuperbipartiens tertias, ad $7\frac{1}{5}$ duplus ſeſquiquartus, ad $5\frac{3}{9}$, id eſt, $\frac{1}{3}$, duplus ſupertripartiens quintas ad $4\frac{8}{13}$. Exempla ſunt cum ſpecie rationum terminos includente: ſic,

$\frac{5}{1}$,	5,	1,	12,	$2\frac{2}{5}$
$1\frac{1}{4}$,	5,	4,	12,	$9\frac{3}{5}$
$1\frac{2}{3}$,	5,	3,	12,	$7\frac{1}{5}$
$2\frac{1}{4}$,	9,	4,	12,	$5\frac{3}{9}$, id eſt $\frac{1}{3}$
$2\frac{3}{5}$,	13,	5,	12,	$4\frac{8}{13}$.

66. *Si quid anteceſſerit quæſtionem, anté explicandum eſt.*

Centum libras emi 10 aureis, vendidi 12, quãtum lucri fuiſſet ex aureis 100? Primó videbis lucrum 10 aureorum eſſe aureos 2. Tum igitur per auream regulam dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item ſi libra 3 aureis empta, venderetur tantum 2, quanta eſſet jactura ex aureis 100? Hic cúm videris jacturam in 3 eſſe 1, tum dices 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt $33\frac{1}{3}$. Sic ſæpe multarum rerum additio facienda, priuſquam proportio concludatur: ut, piperis pondo 1000 in Luſitania empta ſunt nummis 10000, proque his

his vectigal penſitatũ nummis 1000, naulum per Rhotomagum uſque fuerit 300. Ibi deinde vectigal 500, vectura 200: acceſſerit miniſtrorum impenſa 2000, vis in ſingulas libras lucrari 4, id eſt, pro tota ſumma 4000? Adde illa omnia, ſumma erit 18000. Iam dicito, 1000 pondo dant impenſas 18000: ergo 1 dat 18.

Putearius quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu geminarum operarum. Effoſſis autem brachiis 20, ægrotare cœpit, patremque familias mercedẽ debitam rogavit, quanta igitur ea eſt? Hic victus nihil variat, ſed arithmeticæ progreſſionis uſus hic eſt antè proportionis geometricæ concluſionem. Nam ſecundum brachium, laborem primi continet & tertium utriuſque, & ſic deinceps arithmetica gradatione labor creſcit. Itaque ſumma integræ progreſſionis brachiorum eſt 595. At ſumma progreſſionis 34, 20 brachiorũ eſt 210. Jam ad proportionem conclude, ut 595 ad 60, ſic 210 ad 21 $\frac{105}{595}$, vel $\frac{3}{17}$.

Cap. 11. de reductione quadruplici ex inventione quarti proportionalis.

Ex aureæ regulæ conſectario quadruplex reductio oritur partium ad datum nomẽ, integrorum ad partes, partium ad integros, particularium ad partes.

67. Reductio partium ad datum nomen, est multiplicatio reducendi numeri per datum nomen, & facti divisio per reducendum nomen.

Atque hic integra proportio est: ut si quæratur $\frac{3}{4}$ quot sunt $\frac{}{12}$? Hic enim terminos tres habes 4, 3, 12, unde quarto proportionali invēto, respondebis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{9}{12}$. Idem veró est dicere, $\frac{3}{4}$ reductæ ad $\frac{}{12}$, sunt $\frac{9}{12}$, item quærere, quot sunt $\frac{}{12}$ in $\frac{3}{4}$? Reliquæ reductiones compēdium proportionis habent. In his enim proportionis terminis aliquis deest. Itaque multiplicatio vel divisio omittitur.

68. Reductio integrorum ad partes, est multiplicatio integrorum per nomen partium unius integri.

Ut si reducere velis 12 signa ad gradus, scis gradum esse tricesimam partem signi, multiplicabis igitur 12 per 30, & facies 360. Multiplicatio hic tantùm est, quia primus terminus est 1, quo nihil dividitur. Quæstio autem sic esset é suis terminis: 1 signum continet 30 gradus, 12 signa, quot gradus continent? totaque proportio sic esset 1, 30, 12, 360.

69. Reductio partium ad integros, est divisio partium per ipsarum nomen.

Ut

Ut 360 gradus, quot valent ſigna? Scis gradum eſſe $\frac{1}{30}$ ſigni. Itaque divides 360 per 30, & habebis 12. Quæſtio etiam ſic eſſet: 30 gradus valent 1 ſignum, 360 quot valent? tumque proportio concluderetur: 30 gradus valent 1 ſignũ, ergo 360 gradus valent 12 ſigna. Atque hic quia ſecundus terminus eſt 1, quo nihil multiplicatur, diviſio tantúm eſt neceſſaria. Proportio tota ſic eſt 30, 1, 360, 12. Hac igitur utraque reductione, via patet reducẽdi aureos ad aſſes, aſſes ad uncias: contraque uncias ad aſſes, & aſſes ad aureos, & monetæ cujuſcunque genus in partes frangẽdi, parteſque ad totum reducendi.

70. *Reductio particularum ad partes, eſt multiplicatio numerorum inter ſe, & nominum inter ſe.*

Sic $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ redeunt ad $\frac{6}{12}$, id eſt $\frac{1}{2}$, & diviſio hic, ut in reductione integrorum ad partes negligitur, quia 1 eſt primus terminus proportionis, & ꝓportio hic duplex eſt, altera in numeris, altera in nominibus. Tota proportio ſic eſt, 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{12}$: ut enim 1 ad 3, ſic 2 ad 6, item ut 1 ad 4, ſic 3 ad 12. Conſtitutis autem proportionalibus, conſtat factum ab extremis æqualem eſſe facto á mediis, atque ob eandem proportionis cauſſam videri poſſit multiplicatio partium & rationũ nomen & comitem ſimul cum nomine & duce cõplecti: Si ſeries longior fuerit, binæ partes ſunt expediendæ, ut in $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$, primó facies $\frac{6}{12}$, id eſt

$\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, vel $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ quia idem numeri inter ſe multiplicati creant eoſdem, & per hanc particularem reductionem, cognoſcis quid ſint particulæ, cúm vides quales ſint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoſcentur, ut $\frac{2}{7}$ trigintaquinque aureorum ſunt $\frac{70}{7}$, id eſt 10 aurei, tanquam quæreretur $\frac{2}{7}$ $\frac{35}{1}$.

Cap. 12. de variis quæſtionibus proportionis.

Inſtructis & paratis fractorum numerorum præceptis, proportionis uſus multó expeditior erit, qualem compluribus & clarioribus exemplis lubet illuſtrare.

Perſolveris æris alieni $\frac{1}{3}$: deinde $\frac{1}{4}$, & reſtēt 10 aurei, quantum erat totum æs alienum? additæ partes ſunt $\frac{7}{12}$: reliquum igitur eſt $\frac{5}{12}$, unde quæſtionis proportio concluditur.

5 valent 10 aureos: ergo 12 valent 24.

Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur ſub aqua, reliqua pars 60 cubitis ſupra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additæ ſunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valēt 60: unde concludes,

$$5 \text{ valent } 60\text{: Ergo} \begin{cases} 4 & 48 \\ 3 & 36 \end{cases}$$

Talis

Talis eſt quæſtio duplex græcorum epigrã-matum de ſtatua Palladis.

Pallas ego ſum malleata,ſed aurum
Juvenum eſt,donum poëtarum.
Dimidiũ quidẽ auri Chariſius,octavam autẽ
Teſpis,& decimam partem poſuit Solon.
Sed viceſimã Themiſon,reliqua veró talenta
Novem,& ars,donum Ariſtodici.

Adde partes,habebis $\frac{3}{4}\frac{1}{5}$. Itaque reliqua 9 ad cõ-plendum totum , valent 9 propoſita. Hic accidit eundem eſſe numerum propoſitum & reliquum,ut aliud quærendum non ſit. In proximo res alia eſt.

Augeam interrogavit magna virtus Alchide
Multitudinem armentorum quærens, ipſe veró reſpondit :
Circa quidem Alphei fluvium, amice, dimidium quidem horum,
Pars autem octava, collem Saturni circũ-paſcuntur.
Duodecima autem ſeceſſit Taraxippi ad montem:
Circa veró Elidẽ divinã,viceſima paſcũtur.
Verúm in Archadia triceſimam reliqui,
Reliquos autem videto greges, hic quinquaginta.

Additæ partes ſunt $\frac{95}{120}$. Itaque reliqua 25 ad ex-plendum totum valent 50: Ergo 120 valent 240. Pauló diſſimiliter ſolvitur græci item epigrammatis illa quæſtio fratrum Zethi & Amphionis

matrisque Antiopes.

Ambo quidem nos viginti mnas trahimus
Zethusq; & germanus:at si de meo sumpseris
Tertiam & quartam Amphionis.
Sex omnia invenies, matris invenies pōdus.

Primúm simulutriusq; quæsiti numeri,id est 20, cape $\frac{1}{4}$, quæ nempe sit unius & alterius quæsiti $\frac{1}{4}$ communis ea erit 5: 6 autem matris numerus continet hanc communem $\frac{1}{4}$, & præterea unū, id est $\frac{1}{12}$ primi quæsiti numeri,ut perspicies tollendo $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$,unde proportio de primo numero quæsito concludetur.

$\frac{1}{12}$ valet 1: ergo $\frac{12}{12}$, id est totus, valet 12.

Hic numerus Zethi,quo de 20 sublato, manet 8,numerus Amphionis. Nam $\frac{1}{3}$ de 12, item $\frac{1}{4}$ de 8, sunt 4 & 2, & simuluterque 6 numerus Antiopes. Idem veró concludi potest,sumendo primum $\frac{1}{3}$ ejusdem totius 20, id est 6 & $\frac{2}{3}$: 6 enim superatur ab eo $\frac{2}{3}$,id est $\frac{1}{12}$ secundi quæsiti, cujus $\frac{1}{4}$ quæritur,unde concludetur.

$\frac{1}{12}$ valet $\frac{2}{3}$: ergo 1 valet $\frac{24}{3}$,id est 8.

Hic numerus est Amphionis, quo de 20 sublato, restat 12 numerus Zethi.

Emisti dolium vini aureis 8,lucrari vis duos, quanti pintam vendes? Dolium continet pintas 288, aurei octo denariolos 4800,tum proportionem concludito.

288 pinctæ valent 4800 denariolos,ergo 1 pinta valet $16\frac{192}{288}$, id est $\frac{2}{3}$.

Commuta 3 aureos in asses,quales 1 aureus valet

let 50, item in ſemiſſes, quadrantes, æquali ſingulorum generum numero, quot aſſes, quot ſemiſſes, quot quadrantes dabis? commuta 3 aureos in aſſes 50: deinde aſſes in minimam propoſitarum monetam, ut in quadrãtes, habebis 600, quales aſſis valet 4, ſemiſſis 2, quadrans 1. Hi valores 4, 2, 1, additi ſunt 7, unde proportio concludetur.

7 continent ſemel ſingula quæſita genera, ergo 600 continẽt octogies quinquagies cũ $\frac{5}{7}$.

Eme 4 aureis æquali numero libras piperis, Zingiberis, amygdalarum, ſaccari, quot é ſingulis generibus libras habebis? Sume pretiũ unius libræ in ſingulis generibus, ut libra piperis 16 aſſibus væneat, Zingiberis 18, amygdalarũ 2, ſaccari 4, prætiis his additis, totus eſt 40, tũ ſume pro 4 aureis 184 aſſes, & proportionem conclude.

40 aſſes dant 1 libram ſingulorũ generum, ergo 184 aſſes dant 4 libras & $\frac{3}{5}$ unius libræ.

Hic ſi multiplices libris ſingulorũ generum inventum pretium, reſtitues 184 aſſes. In ſequentibus proportio alia quæſitam antecedit.

Curſor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit, curſor alius velocior, Lugduno Lutetiam idem iter triduo conficit, quando & ubi inter ſe occurrent? Præpone proportiones antecedẽtes.

Primus 5 diebus totum iter conficit:

Ergo 1 die conficit $\frac{1}{5}$ itineris.

Secundus 3 diebus conficit iter:

Ergo 1 die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes

additæ ſunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur.

$\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die, ergo totum iter conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id eſt 1 die, & ſequentis $\frac{7}{8}$. hoc tempus eſt concurſus, jam dicito,

Primus 5 diebus conficit totum : ergo $\frac{15}{8}$ diei conficiet $\frac{15}{40}$ itineris, id eſt $\frac{3}{8}$.

Secundus conficit 3 diebus totum : Ergo $\frac{15}{8}$ conficit $\frac{15}{24}$, id eſt, $\frac{5}{8}$. Locus igitur concurſus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris á primo confecti, & ad $\frac{5}{8}$ á ſecũdo confecti.

Curſores 2 Lutetia Romam contendunt, ſed primus 20 millia paſſuum quotidie conficit, ſecundus 33, primus 6 diebus præceſſerit, quando ſecundus aſſequetur? Imprimis collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum ſume 13 exuperantiam ſecũdi, & dic. Secundus cõficit 13 millia uno die ſupra primũ, idem 120 millia, quot diebus ſupra eundem conficiet? quæſtio ſic eſt,

13, 1, 120, $9\frac{3}{13}$.

Potator quidam ſolus exhaurit cadum vini 20 diebus : at cúm unà potat uxor, 14 diebus exhaurit : quot igitur diebus uxor ſola cadum exhauriet? Maritus 20 diebus exhaurit totum, ergo 14 diebus exhaurit $\frac{14}{20}$ vel $\frac{7}{10}$. Itaque uxor 14 diebus potat reliquũ, id eſt, $\frac{3}{10}$. Jam dicito, uxor exhaurit 14 diebus $\frac{3}{10}$. Ergo $\frac{10}{10}$, id eſt totũ: exhaurit 46 diebus & $\frac{2}{3}$ unius diei.

E 4 architectis ædificium totum abſolveret omnes

primus anno 1, secundus 2, tertius 3, quartus 4. Si omnes simul adhibeantur, quanto tempore absolvent? Secundus 2 annis absolvit totũ opus: ergo 1 anno absolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$. Adde jam singulorũ opus $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, habebis $\frac{25}{12}$, unde concludes: Quatuor architecti absolvunt $\frac{25}{12}$ ædificii 1 anno, ergo iidem absolvent $\frac{12}{12}$ vel totum $\frac{12}{25}$ unius anni, id est 5 mensibus, & $\frac{19}{25}$ unius mensis.

E duobus architectis primus absolveret 30 diebus, secundus 40, tertio autẽ addito 15 diebus absolvunt, quot diebus tertius solus effecisset? Primus 30 diebus absolveret totum: ergo 15 diebus absolvet $\frac{15}{30}$ ædificii, id est $\frac{1}{2}$, secundus $\frac{15}{40}$, id est $\frac{3}{8}$, quæ additæ sunt $\frac{7}{8}$. Itaque tertius effecisset $\frac{1}{8}$ illis 15 diebus. Jam denique dicito: $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo $\frac{8}{8}$, id est totum, efficitur 120 diebus.

Item, Unius moletrinæ tres molæ molunt 12 horis modios, prima 18, secunda 13, tertia 8, quot horis universæ molent modios 24? & quantum singulæ? Adde primúm 18, 13, 8, facies 39, prima quæstio sic erit 39, 12, 24.

Dices igitur 39 modii moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur horis $7\frac{5}{13}$. Tum de tribus molis triplex erit quæstio: prima sic. Prima mola molit 12 horis 18 modios: Ergo prima mola horis $7\frac{5}{13}$, quot modios molet? dicito: 12 dant 18: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt $11\frac{1}{3}$.
In secunda & tertia dicito,
12 dant 13: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt 8. item

12 dant 8 : ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt $4\frac{12}{13}$.

Fons duas fiſtulas habet, prima implet lacum horis 4, ſi ſola fluat, ſecunda vacuat horis 11, ſi illa obſtructa ſit: Si unà fluant, quot horis implebitur lacus? Diſtinguito proportiones antecedentes, & dicito,

4 horæ implent lacum: ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus. deinde

11 horæ vacuant lacum, ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. Jam ut ſola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, reſtabunt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora, inde quæſtionis proportio concludetur.

$\frac{7}{44}$ lacus implētur 1 hora: ergo $\frac{44}{44}$ implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id eſt 6 horis & $\frac{2}{7}$ unius horæ. Sed quia nominum in diviſione nulla eſt ratio iis rejectis, & in hoc & in cœteris omnibus exemplis, expeditiús concludes. Statues igitur proportionis hujus terminos hoc modo,

7, 1, 44, $\frac{44}{7}$, id eſt $6\frac{2}{7}$.

Lacus fontis tres fiſtulas habet, quarum prima uacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, ſecunda $\frac{1}{2}$, tertia hora integra, quanto tempore fluētes ſimul omnes vacuant lacum? Dices hic ut anteá.

$\frac{1}{4}$ horæ vacuat ſemel, ergo 1 hora vacuat quater. Itaque $\frac{1}{2}$ vacuat bis, 1 hora ſemel, adde has vices, habes 7, & dicito,

Lacus vacuatur ſepties 1 hora, ergo vacuatur ſemel $\frac{1}{7}$ horæ, termini ita ſunt,

7 1 1 $\frac{1}{7}$.

Leo fontis 4 fiſtulas habet, quarum prima imple

plet ſubiectum lacum 24 horis, ſecunda 36, tertia 48, quarta 6: Si ſimul fluant, quot horis implebunt? facito proportiones antecedentes,

24 horæ implent totum, ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus.

36 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus.

6 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{37}{144}$, quales 144 totum faciunt, rejectis itaq; iiſdem nominibus, dices,

37 partes lacus implentur 1 hora: ergo 144, id eſt totus, impletur 3 horis & $\frac{33}{36}$ unius horæ.

Cap. 13. de proportione diſjuncta, inverſa.

Proportio diſjuncta directa adhuc fuit, qua inverſa utendum eſt, quoties rerum comparatarum proportio ejuſmodi eſt, ut quantó magis aliæ creſcant, tantó magis aliæ minuantur. Itaque primus terminus hic pro quarto quærendus eſt.

Amphora ſufficit 3 dies 30 convivis, 6 dies, quot convivis ſufficiet? termini quæſtionis ita ſunt, 3, 30, 6. Factus autem á primo & ſecúdo eſt 90, quo diviſo in 6, quotus erit 15 pro primo inverſo, tota proportio ſic eſt, 15, 3, 30, 6.

Commeatus ſuppetit 7 menſes 3000 obſeſſis militibus: 12 menſes, quot obſeſſis ſuppetet? termini proportionis ita ſunt,

1750, 7, 3000, 12.

Cúm modius tritici vænit 5 aureis, tum panis quadrantis eſt 4 unciarum: ergo cúm vænit 3, panis erit unciarum 6 & $\frac{2}{3}$, & hic primus terminus directæ proportionis eſt quartus.

Pannus latus 6 ulnas, longus 7, veſtiendus eſt æquali panno lato 3 ulnas, longitudo igitur erit 14 ulnarum.

15 boves arant decem jugera 8 diebus, quare 20 boves 10 jugera arabunt diebus 6. In iis quæſtionibus res eadem iterata proportionis terminum nullum facit, tanquam de agro aliquo ageretur, & ita concluderetur,

15 boves arant 8 diebus, quare 20 arabunt 6.

Tale eſt Ariſtotelis exemplum 1. cap. 1. de cœlo, cúm ait, Proportionem quam habent pondera, tempora, ἀνάπαλιν, id eſt inverſo modo habebunt, ut ſi dimidium pondus in tali, duplum in dimidio hujus. Eſto igitur Ariſtotelea proportio. Pondus 20 librarum deſcendit certum ſpatium horis 2, pondus igitur 40 librarum, idem ſpatium deſcendet hora 1. Proportionis termini ita ſunt, 1, 20, 2, 40.

Trium mercatorum primus contulit aureos 60 per 6 menſes, ſecundus autem per 7 menſes, tertius per 5 ſortem neſcio quam contulerint, lucrum autem fuerit ſingulis aureorum 30: quanta eſt ſors ſecundi, quanta tertii? Dicito: 6 menſes lucrantur 30 ex 60, ergo lucrantur tantundem 7 menſes ex 51$\frac{2}{7}$, & 5 menſes ex 72.

Caput

Caput 14. de additione proportionis.

Hactenus proportionis disjunctæ doctrina fuit tum directæ tum inversæ, propria differentia sequitur ex additione & duplicatione terminorum.

71. *Additio proportionis est additio terminorum.*

Estque duplex.

72. *Additio proportionis prima est assumptio antecedentis & consequentis ad consequentem.* 14.d.5.

Ut 2 ad 4, sicut 3 ad 6: ergo 2 & 4, id est 6 ad 4, ut 3 & 6, id est 9 ad 6.

73. *Additio proportionis secunda, est assumptio omnium antecedentium ad omnes consequentes.* 12.p.7.

Ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: ergo 2 & 3, id est 5 ad 4 & 6, id est 10, ut 2 ad 4.

Hæc secunda proportionis additio propter quotidianum usum in cōsortio & societate mercatorum vulgó regula societatis appellata est. Quare ejus utilitas pluribus exemplis est illustranda.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantum

ſingulis accedit? Quæſtio additis antecedentibus ita ſolvetur:

	8	4,
14 dant 7 : ergo		
	6	3.

& contra ſors concluditur.

	4	8
7 dant 14 : Ergo		
	3	6

Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, ſecundus 60, tertius 50, lucratique ſunt aureos 100, quantum ſingulis accedit? Adde antecedentes, ut anteá, & conclude,

	90	45
200 dant 100 : ergo	60	30
	50	25

Contrá ſingulares ſortes ex additis conſequentibus concludentur:

	45	90
100 dant 200: ergo	30	60
	25	50

Octo creditoribus debentur aurei, primo 15, ſecundo 24, tertio 32, quarto 54, quinto 60, ſexto 75, ſeptimo 86, octavo 100: Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino ſatisfieri non poteſt. Ad proportionis igitur æquitatem recurretur: quantum ſingulis pro rata bonorum portione perſolvetur? Ex additis antecedentibus ita concludes,

	15	$5 \frac{20}{446}$
	24	$8 \frac{32}{446}$
	32	$10 \frac{340}{446}$
	54	$18 \frac{72}{446}$
446 dant 150: ergo	60	$20 \frac{80}{446}$
	75	$25 \frac{100}{446}$
	86	$28 \frac{412}{446}$
	100	$35 \frac{282}{446}$

Aurei 200 tribus ea conditione partiendi, ut primus triplo plus habeat quám ſecundus, & ſecundus quadruplo quám tertius. Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, ſecundus habebit 4, & primus 12, quibus additis, conclude,

	12	$141 \frac{3}{17}$
17 dant 200: ergo	4	$47 \frac{1}{17}$
	1	$11 \frac{13}{17}$

Hæreditas 3000 legata quinque fratribus ea cōditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, ſecundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id, uti proponitur, fieri nō poteſt, quia datæ partes ſuperant totum. recurratur igitur ad æquitatis proportionem, & numerus inveniatur, qui minimus habeat datas partes. Hic enim eſt uſus talis numeri, quoties datæ partes totum ſuperant, & inventi partes inveniantur datis illis cognomines, quæ æqualiter quinque fratribus aſſem partiantur. Minimus veró diviſus á datis partibus eſt 60, cujus partes, partibus illis datis cognomines ſunt. 30, 20 15, 12, 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam,

	30	1034	$\frac{42}{87}$
	20	687	$\frac{57}{87}$
87 dant 3000: ergo	15	517	$\frac{21}{87}$
	12	413	$\frac{69}{87}$
	10	344	$\frac{72}{87}$

Tres partiuntur 100 ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ſecundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item, ſicuti proponitur, fieri non poteſt, quia partes totum ſuperant. Æquitas ergo proportionis adhibeatur. Itaque ſumes primò minimum diviſum 60, cujus diviſores datis partibus cognomines ſunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro ſecundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primùm ſeparatim additis, ſunt 35, 27, 22. Deinde ſimul ſunt 84: conclude igitur,

	35	41	$\frac{2}{3}$
84 dant 100: ergo	27	32	$\frac{1}{7}$
	22	26	$\frac{4}{21}$

Quatuor ſic partiuntur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, ſecundus $\frac{3}{5}$ & 8, tertius $\frac{5}{6}$ & 7, quartus $\frac{7}{8}$ & 6. Hic item partes majores ſunt toto. Ad illud igitur proportionalis æquitatis judicium refugiamus, & quatuor in hoc exemplo ſuperiorum diſſimilia diſtinguamus, primò nominum propoſitorum, præteritis numeris

meris & integris: aſſumendus minimus diviſus eſt, hic erit 120, ſecundó partes cognomines inventæ per ſuos numeros multiplicandæ. Itaque $\frac{2}{3}$ erunt 80 $\frac{3}{5}$, 72 $\frac{5}{6}$, 100 $\frac{7}{8}$. 105. tertió é 600 ſumma dividenda, tollantur integri numeri 9, 8, 7, 6, id eſt 30, manebunt 570 pro additis conſequentibus: quartó denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, ſecundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum ſic erit.

	80	136 $\frac{261}{357}$
357 dant 570: ergo	72	122 $\frac{342}{357}$ vel $\frac{114}{119}$
	100	166 $\frac{237}{357}$
	105	173 $\frac{231}{357}$ vel $\frac{11}{17}$

Cap.15. de alligatione.

Alligationis regula quæ dicitur, hac proportionis additione multúm utitur: tametſi ipſa per ſe nulla eſt proportio.

74. *Alligatio eſt æquatio medii cum extremis inæqualibus per alternam ab eo differentiam.*

Ut ſi é duobus vini generibus, quorum primum valeat 6, ſecundum 12, miſcédum ſit quod valeat 10, alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 á medio 100 erũt 2 & 4 quæ ſignificabũt, ſi 2 ſu-

mantur primi generis, 4 assumenda secundi. Itaque si sextarii 6 miscendi sint, alligatio perfecta erit, ut hic vides,

	6	2
10		
	12	4

Hujus æquationis caussa est é communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, compones 60, item si multiplices 10 per 2 & 4 segmenta alterius multiplicati, compones duos compositos 20 & 40 æquales primo composito, tum si multiplices eadem segmenta 2 & 4 per totum 10 alterno segmento, nunc auctum, nunc minutum, id est per 12 & 6, compones duos cõpositos 4 8 & 12, primo composito æquales, ut hic vides,

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

Hinc igitur patet alligationis regula, neque medius alligationis terminus est proportionis, sed medius inæqualium extremorum: Estque minor majore extremo, major minore. Sed alligationis quæstio rara est sine proportionis additione, ut in exemplo. Si unus sextarius temperãdus esset é duobus illis generibus, tum alligatio facta esset, diceretur nõ peti 6, sed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo: 6 redeunt

deunt ad 1 : ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$, 4 ad $\frac{4}{6}$, totaque quæstio ſic erit,

	6	2			2 $\frac{2}{6}$ vel $\frac{1}{3}$.
10			6	1	
	12	4			4 $\frac{4}{6}$ vel $\frac{2}{3}$.

Tale eſt Archimedeum problema illud apud Victruvium lib. 9.cap.3.de aurea Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Duas,inquit Victruvius,maſſas ejuſdem ponderis cum aurea corona Archimedes fecit,alteram auream,argẽteam alteram,quibus viciſſim in vas aqua plenum demiſſis, é differentia effuſæ aquæ ad auream maſſam & argenteam,item ad ipſam coronam, deprehendit argenti in aurea corona miſtionem . Eſto igitur inæqualis effuſio aquæ ex aurea maſſa 20,ex argentea 36,ex ipſa regis corona 24. Sumptis differẽtiis, vides auri triplum, argenti ſubtriplum in corona permiſtum eſſe:Et ſi corona 16 pondo eſſet,eſſent auri 12,argenti 4, & hæc alligatio eſt. At ſi alterius põderis ea fuerit,ſimilem rationẽ proportionis additione concludes, ut ſi fuerit 100 pondo, quæſtionis explicatio tota ſic erit,

	20	12			12	75
24			16	100		
	36	4			4	25

Talis eſt in permiſcendis metallis quotidiana ratio, ut ſi aurifex habeat 100 pondo argen-

ti,quorum unum valeat 17. Item alteram habeat maſſam,cujus põdo valeat 24, quantũ argenti é ſecunda maſſa addet primæ,ut pondo valeat 22, & quantum denique omnino futurum eſt? Alligatio alternarum differentiarum ſic erit,

	17	2
22		
	24	5

Unde concludes 2 pondo primi argenti, 5 pondo ſecundi requirunt: Ergo 100 requirunt 250: quibus adde 100,é prima maſſa habebis 350 pondo miſti argenti.

Alligationis cauſſa eadem fuerit, ubi termini non tantúm tres,ſed quotlibet proponentur: Bini ſiquidem extremi ad unum medium perpetuó conferendi: ut vini genera quatuor ſunto, primique amphora valeat 7 aureos,ſecundi 9, tertii 10,quarti 12, & miſcendæ ſint amphoræ 300, quæ ſingulæ valeant 11 aureos, diſpoſitis terminis,differentiiſque alterné alligatis, tota quæſtio ſic erit,

	7	1			1	30
	9	1			1	30
	10	1			1	30
11			10	300		
	12 4	21			7	210

Nihil veró intereſt,utrum majores termini ſint plures:ut 400 pondo ficuũm,amygdalarum,zingiberis,piperis, moſchocaryorum, croci,emuntur 200 libellis: Libra autem ficuũ emitur 6 ſolidis,

lidis, amygdalarum 7, zingiberis 9, piperis 11, moſchocaryorum 12, croci 16. Quot igitur ſunt pondo ſingulorum generum? Hic preciorum permiſtio & alligatio eſt. Sume itaque precium unius libræ pro medio quantitatis, ſic,

400 pondo emuntur 200 libellis:
Ergo 1 emitur $\frac{200}{400}$ vel $\frac{1}{2}$ libellæ,
id eſt 80 ſolidis.

Tum ſingulorum generum pretia ipſi ſubſcribe in eadem moneta, quæſtio tota ſic erit,

6 ficu.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
7 amyg.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
9 zingib.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
10				51. 400			
11 pip.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$
12 moſch.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$
16 croc.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$

Adhuc additio proportionis fuit, cui ſubductio proportionis eſt in elementis oppoſita.

75. *Subductio proportionis, eſt aſſumptio reliqui termini.*

Eſtque duplex.

76. *Subductio proportionis prima, eſt aſſumptio reliqui termini ad ſubductam.*

Ut 6 ad 4, ſicuti 9 ad 6: ergo 2 ad 4, ut 3 ad 6. itaq;

77. *Si fuerit ut totus ad ſubductum, ſic totus ad ſubductum, reliquus erit ad ſubductum, ut reliquus ad ſubductum.*

78. *Subductio proportionis ſecunda, eſt aſſumptio reliqui ad reliquum.*

Ut 5 ad 10, ut 2 ad 4: ergo ut 5 ad 16, ſic 3 ad 6. itaque

79. *Si fuerit ut totus ad totum, ita ſubductus ad ſubductum, reliquus erit ad reliquum, ut totus ad totum, 19. p. 5.*

Cap. 16. de duplicatione proportionis.

Jam de duplicatione proportionis dicendum eſt.

80. *Duplicatio proportionis, eſt aſſumptio facti á primo & ſecundo pro primo, & facti á quarto & quinto pro tertio, unde ſextus pro quarto concluditur.*

Ut ſi quæratur, 10 boves 7 diebus arant 35 jugera, 20 boves 24 diebus quot jugera arabunt? termini quæſtionis 5 ita erũt, 10, 7, 35, 20, 24. Factus veró é 10 & 7 erit 70 pro primo termino, factus é 24 & 20, erit 480 pro tertio, unde concludes

cludes pro quarto 240, terminique proportionis duplicis sic erunt,

10	7	35	20	24
70		35	480	240

Hic veró duplex proportio permiscetur, prima simplex & directa est boum & jugerum. 10 boves arant 7 diebus 35 iugera: ergo 20 boves eodem tempore arabunt 70. Hic tempus idem nullum proportionis terminum facit, tanquam diceretur, cúm 10 boves arant 35 jugera, 20 boves arant 70. Secunda proportio simplex est, 20 boves arant 7 diebus 70 jugera: ergo idem 20 diebus arabunt 24 jugera. Hic tempora diversa faciunt terminos proportionis, idem 20 boum numerus nullum terminum facit. Caussa autem cur illi duo facti pro quatuor simplicibus assumantur, est, quod ratio tertii 35 ad sextum 240 sit é ratione 10 primi ad 20, quartum & ratione 7 secúdi ad 24 quintum, quæ ratio est duorum factorum 70, 480: 3 aurei 2 mensibus lucrantur aureos 6, aurei 4 mensibus tribus quot lucrabuntur? Hic si facias 6 é 3 & 2: item 12 & 4 & 3, & concludas 6 dant 6, ergo 12 dant 12, nihilo plus facies, quám si dixisses, 2 dant 6, ergo 4 dant 12, quia multiplicati per eundem 3 fiunt. Itaque factorum & facientium est eadem ratio. Quare quoties in tali duplicatione æquales termini sic occurrent, æqualibus terminis omissis, proportio concludenda est. Sed ubertas regulæ est uberiús explicanda.

Trium mercatorum primus contulit 44 per per 8 menſes, ſecundus 32 per 6 mēſes, tertius 24 per 4 menſes, unde lucrati ſunt aureos 80, quantum ſingulis ex hoc lucro cedet? Multiplica ſortem quamque cum ſuo tempore, primi factus eſt 352, ſecundi 192, tertii 96, & ſingulis jam additis, dicito per auream regulam,

	352	44
640 dant 80: ergo	192	24
	96	12.

Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis ſtipendiū eſt 4 aurei, equitis 9, præda aureorum 2000 his dividenda, quantum ſingulis dabitur? Multiplica numeros perſonarum, ſtipendiorum: primus factus erit 24400, ſecundus 6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic per auream regulam,

	24400	$1577 \frac{17088}{30934}$
30934 dant 2000: ergo		dant
	6534	$422 \frac{13852}{30934}$

Canonici 12, & ſacellani 20, partiuntur quotannis aureos 3000, ſed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties ſacellanus 4, quantum igitur eorum ſtipendium eſt annuum? Multiplica numeros perſonarum & ſtipendiorum, primus erit 60, ſecundus 80, qui additi ſunt 104. dic igitur.

	60	$1285 \frac{5}{7}$
140 dant 3000: ergo		
	80	$1714 \frac{2}{7}$.

Inter-

81. *Interdum faciendi termini complures é variis generibus ſortium, temporum, perſonarum, aliarumve rerum, in unumque tandem omnes addendi.*

Quatuor mercatorum biennii ſocietate inita, primus 30 aureos cõtulit, ſed octavo poſt mẽſe 10 ſubduxit, iterumq; viceſimo mẽſe ineunte 12 cõtulit, ſecũdus initio 24 cõtulit, ac ſexto poſt exacto menſe ſubduxit 8. Denuoq; ſexti decimi menſis initio 14 retulit, tertius initio contulit 20. & ſeptimo poſt mẽſe exacto omnes ſubduxit, ſed decimoſeptimo poſt exacto mẽſe 16 retulit, quartus ſeptimo mẽſe ineunte, 18 aureos contulit, ſed quarto poſt exacto mẽſe 9 ſubduxit, iterũq; decimoſeptimo menſe incipiẽte 15 addidit, lucrũ ex omnibus his ſummis factũ eſt 100 aureorũ. Singulorũ igitur pecunias & tẽpora in ſuum numerũ rediges: primi 30 aurei & 8 menſes faciunt 240: deinde reliqui 20 aurei & 11 mẽſes faciunt 220, poſtea 20 aurei & 12, id eſt 32 & mẽſes 5 faciunt 160. Deniq; facti tres additi ſũt 620. Secũdi mercatoris 24 aurei & 6 menſes faciunt 144: Deinde reliqui 16 & 9 menſes faciunt 144, tum additi aurei 14 & 16, id eſt 30 cum 9 mẽſibus, faciunt 270. Hi tres facti additi ſunt 558. Tertii 20 aurei & 7 menſes faciunt 140: Deinde 16 aurei & menſes 7 faciunt 112. Hic factus additus priori, conſtituit 252, quarti 18 aurei & 4 menſes faciunt 72, tum 9 aurei & menſes 6, faciunt 54. Denique 9 & 15,

id eſt 24 aurei & 8 menſes, faciunt 192. Hi quatuor facti additi, ſunt 318. Colligamus tandem hos quatuor factos, & dicamus per aureā regulā.

	620	$35\frac{205}{437}$
	558	$31\frac{463}{437}$
1748 dant 100: ergo		
	252	$14\frac{182}{437}$
	318	$18\frac{84}{437}$

Cap.17. de duplicatione proportionis inverſæ.

Proportionis duplicatio aliquando invertitur.

82. *Duplicatio proportionis inverſæ, eſt aſſumptio facti á primo & quinto pro primo, & facti á tertio & quarto, pro tertio, unde ſextus pro quarto inverſé concluditur.*

Ut hic: 2 meſſores 4 diebus demetunt 6 jugera, 8 meſſores 12 jugera, quot diebus demetent? invenies 2, quæſtioque tota ſic erit,

2, 4 6, 8, 12
2, 24 4 48

Hic etiam ut in directa, proportio duplex permiſcetur, quam potes ita ſeparatim concludere, primó inverſé: duo demetunt 6 jugera 4 diebus, ergo 8 demetent jugera eadem 1 die. Hæc proportio eſt inverſa hoc modo, 1, 2, 4, 8.

Secun-

Secunda directa est, sic: 8 messores demetunt 6 jugera 1 die: ergo iidem demetent 12 jugera 2. Caussa est hic superioris similis, quia ratio 4 secundi termini ad 2 quartum, est facta é rationibus 8 quarti ad 2 primum, 6 tertii termini ad 12 quintum, quæ duæ rationes faciunt terminos primum 24, & tertium 48.

Cap. 18. de proportione continua.

Proportio disjuncta generatim descripta est, jam tempus est de continua dicendi.

83. *Proportio continua est, quãdo quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium.*

Ut in 2, 4, 8. Continuæ proportionis proprietas ex aurea regula sic est,

84. *Si tres numeri fuerint cõtinué proportionales, factus ab extremis erit æqualis facto á medio: & si factus ab extremis fuerit æqualis facto á medio, tres numeri erunt cõtinué proportionales.* 20.p.7.

Ut in 2, 4, 8 facto ab extremis 16 est æqualis 16 facto á medio. Hinc sequitur inventio tertii proportionalis,

85. *Si datis duobus numeris primus di-*

viſerit factum á ſecundo, quotus erit tertius proportionalis. 18.*p.*9.

Ut in datis 2 & 4, multiplica 4 per ſeſe, facies 16, quem 2 primus dividit in 8. Itaq; 8 eſt tertius proportionalis: ut in 2, 4, 8. Itaque

86. *Si duo numeri habuerint tertium proportionalem, erunt facti inter ſe.* 16.*p.*9

Quatuor amicorum primus accipiat aureos tres, ſecundus 6, tertius tantó plures ſecundo, quantó plures ſecundus habet primo, & quartus item tantó plures capiat tertio, quãtó plures tertius capit ſecundo, quot habebit igitur tertius? quot quartus? Inveni duobus datis tertium continué proportionalem, & iterum duobus ultimis tertium continué proportionalem, quæſtio ſoluta eſt, erunt enim termini continui 3, 6, 12, 24.

87. *Si continuorum primus diviſerit ſecundum & antecedens quiſque dividet conſequẽtem alium: & ſi antecedens quiſque diviſerit ullum conſequẽtem, primus etiam dividet ſecũdum.* 6. & 7.*p.*8.

Ut in 1, 2, 4, 8, 32. 64. Itaque

88. *Si ab unitate numeri fuerint continui, minor dividet majorem per aliquẽ datorum continuorum.* 11.*p.*9.

Ut

Ut in proximo exemplo.

89. *Si fuerint numeri continué proportionales, ratio primi ad secundum duplicabitur in tertio, triplicabitur in quarto: & sic deinceps ratio primi ad extremum fiet ex omnibus intermediis rationibus.* 10.d.5.

Ut in 3, 9, 27, 81: ratio 27 ad 3 est duplicata ratio 9 ad 3: ut hic vides in contractis terminis,

$$\frac{3}{1}\quad\frac{3}{1}\quad\left(\frac{9}{1}\right.$$

Sic ratio 81 ad 3, est ratio triplicata 9 ad 3, ut hic constat in contractis terminis

$$\frac{3}{1}\quad\frac{3}{1}\quad\frac{3}{1}\quad\left(\frac{27}{1}\right.$$

Denique ratio extremorum fit ex omnibus rationibus intermediis: imó veró

90. *Si fuerint quotlibet rationes terminis quomodocunque continuæ, ratio extremorum fiet ex omnibus intermediis rationibus.*

Ut in 1, 2, 3, 4, 5: ratio 5 ad 1 fit é rationibus.

$$\frac{2}{1}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{4}{3}\quad\frac{5}{4}\quad\left(\frac{120}{24}\right.\quad\left(\frac{5}{1}\right.$$

E continuationis autem geometricæ natura inventa est hæc regula.

91. *Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur.*

Sic libræ usque ad 7 appenduntur tribus põderibus, quorum primum unius libræ, secundum binarium, id est duarum librarum, tertium quaternarium, quia progressionis 1, 2, 4 termini tãtum comprehendunt: sic libræ usque ad 15 appẽduntur 4 ponderibus hac progressione significatis 1, 2, 4, 8: Sic libræ 31 ponderibus hujus continuationis 1, 2, 4, 8, 16: Sic in tripla ratione, libræ usque ad 40, appenduntur ponderibus hac progressione significatis, 1, 3, 9, 27. Sic libræ usque ad 121 appenduntur his ponderibus, 1, 3, 9, 27, 81, & sic deinceps libræ terminis triplæ progressionis comprehẽsæ, totidem cognominibus ponderibus appendentur.

Julianus juriscõsultus de liberis & posthumis hæredibus instituendis generis hujus quæstionẽ proponit Digest. lib. 28. Si ita scriptum sit: Si mihi filius natus fuerit, ex besso hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto. Si veró filia mihi nata fuerit, ex triẽte hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto: & si filius & filia nati essent, dicendum est assem distribuendum esse in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor duas filias unam partem habeat. Ita enim secundum voluntatem testãtis filius altero tanto amplius habebit quám

uxor,

uxor, item uxor altero, tantó amplius habebit quám filia. Licet enim ſubtili juris regulæ conveniat ruptum fieri teſtamentum: Attamen cúm & utroque nato teſtator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad eiuſmodi ſententiam humanitate ſuggerente decurſum eſt, quod etiam inventio Celſo apertiſſimé placuit. Hæc juriſconſultus: unde intelligimus ex volũtate teſtatoris tres numeros continué proportionales in dupla ratione inveniendos eſſe. Sumes itaque minimos 4, 2, 1, ac ſi hæreditas fuerit 70 coronatorum, ex additis illis terminis quæſtio hæriſcundæ familiæ ita ſolvetur.

	4		40
7 dant 70: ergo	2	dant	20
	1		10

Quód ſi uxor tres filios & duas filias pepererit, tres quaternarii pro tribus filiis, & duo binarii pro duabus filiabus aſſumendi. Adde igitur omnes & conclude,

	4		$17\frac{1}{2}$
	4		$17\frac{1}{2}$
	4		$17\frac{1}{2}$
16 dant 72: ergo		dant	
	2		$9\frac{3}{8}$
	1		$4\frac{3}{8}$
	1		$4\frac{3}{8}$

92. *Si duo numeri multiplicentur uterque per utrunque, fient tres continuè proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur per datum ducem, rursumque ultimus per datum comitem, quatuor fient continuè proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet continui in data ratione. é 2.p.8.*

Ut hic vides

	2		4	
	4	8	16	
8	16	32	64	
16,	32,	64,	128,	256.

93. *Si duo numeri habuerint continuè medios, duo proportionales datis habebũt totidem per datam rationem.* 8.*p*.8.

Ut in exemplo

8	12	18	27
32	48	72	108

inter 8 & 27 ſunt duo medii 12 & 18, inter 32 & 108 rationis eiuſdem nempe $3\frac{1}{8}$ ſunt etiam duo 48 & 72, qui medii inveniũtur per datam rationem 8 ad 12, ſic dices 32 ad 48.

94. *Si duo numeri & unitas habuerint totidem continuè medios, dati inter*

ſe

se etiam totidem habebunt.10.*p*.8.

Ut hic,

	1				1		
	2	4			2	3	
4	8	16		4	6	9	
8,	16	32	64.	8	12	18	27.

Deducitur é 2.p.8: sed generaliter accepta.

95. *Si continué proportionalium quilibet seipsum multiplicaverit, facti erunt continué proportionales: & si dati factos multiplicaverint, facti rursus erunt continué proportionales, idq; semper circa extremos accidet*.13.*p*.8.

Ut hic,

2	4	8
4	16	64
8	64	512

Caput 19. de inventione optati termini.

96. *Si arithmeticé ab unitate cõtinui, geometricé á numero cõtinuis respondeãt, arithmetici geometricorũ indices erunt, et factus á duobus geometricis, tãtus erit suæ progreßionis terminus, quantus est simul-*

uterque arithmeticorum multiplicatis respondentium.

Ut in hac progressione dupla,

1	2	3	4	5	6
2	4	8	16	32	64

Arithmetici enim 1, 2, 3, &c indicant 2, 4, 8, esse progressionis primum, secundum, tertium terminum. Itaq; si quæras terminum quempiã, ut septimum, adde indices eum constituentium numerum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos iis respondẽtes 8 & 16, facies 128 septimũ terminũ progressionis. Sic erit in hac progressione tripla,

1	2	3	4	5
3	9	27	81	243

Si quæras nonum, multiplica 243 per 81 respondentes arithmeticis indicibus 4 & 5, constituentibus 9, facies 9,683 nonum terminũ. Hæc termini optati est inventio.

Caput 20 de continuè minimis,

Proportio continua nõ solũ recipit communem ad minimos contractionem, sed de iis propriam institutionem habet.

97. *Si duo minimi datæ rationis numeri multiplicentur uterque per utrunque, tres fient minimi continuè proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur*

per

per datum ducem, rursumque ultimus per datum comitem, quatuor fient minimi cõtinué proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet minimi continui in data ratione. 2.p.8.

Ut hic vides,

			2		3			
		4		6		9		
	8		12		18		27	
16		24		36		54		81.

98. *Si duo inter se primi habuerint cõtinué medios, uterque & unitas habebũt totidem. 9.p.8.*

Ut patet in proximo exemplo.

99. *Si fuerint quotlibet continué proportionales extremorum inter se primorũ, erunt minimi proportionalium: & si fuerint minimi proportionalium, erunt extremorum inter se priomrum. 1. & 3.p.8.*

Ut in 8,12,18,27. Nam cúm sint extremi inter se primi, omnes uná & medii & extremi, primi inter se erunt, itaque minimi.

100. *Si continuatio fuerit extremorum inter se primorum, erit maxima. 17.p.9.*

Ut in 8, 12, 18, 27. Atque hæc de proportione simplici.

Cap.21.de æquatione.

101. *Proportio conjuncta est, quæ conjungitur é proportione disjuncta & continua:* eaque triplex in elemẽtis insignis est æquatio, exuperati ultimi ad præcedentes. Inventio continué minimorum in datis rationibus.

102. *Æquatio est, quando positis in uno ordine quotlibet numeris, aliisque totidem in altero, binis sumptis in eadem ratione, fuerit ut primi ordinis primus ad ultimũ, sic secundi ordinis primus ad ultimum.*

Itaq; in continuanda æquatione, termini proportionis utrinque extremi duntaxat assumendi sunt, mediis intermissis : estque directa vel inversa.

103. *Æquatio directa est, quando fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi primus ad secundum : itemque ut primi ordinis secundus ad tertium, sic secundi secundus ad tertium.*

Ut

Ut hic vides in tribus exemplis quæ continuari in unum possunt.

9, 6, 3, 9, 6, 9, 3, 6, 9,
12 8 4 12 8 12 4 8 12.

quo genere proportionis plurimæ in elementis demonstrationes á Theone conclusæ sunt.

104. *Æquatio inversa est, quãdo fuerit ut primi ordinis primus ad secundum, sic secundi secundus ad tertium: utque primi secundus ad tertium, sic secũdi primus ad secundum.*

Ut vides in tribus exemplis,

9, 8, 6, 9, 8, 9, 32, 16, 8,
24 18, 16, 16, 18, 16, 8, 4, 3,

Hic enim ut 9 ad 8, sic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, sic 24 ad 18, & similiter inverso ordine in reliquis exemplis. Difficile autem sit in numeris integris terminos proportionis inversé æquatos cõtinuare: continuari tamen possunt ordine non solúm inverso, sed in contrarias partes tendente, ut hic vides,

6, 3, 2, 1, 3, 4, 3, 1, 2,
12, 24, 6, 8, 24, 12, 8, 4.

Hic enim æquatio est, cúm sit extremorũ eadem ratio in utroque ordine, tum inversa, ut res ipsa ostendit. Hoc proportionis genus minus usi-

tatum est, eo tamen Archimedes utitur quarto theoremate secundi de sphæra.

Cap. 22. de exuperantia ultimi ad præcedentes.

105 *Si fuerint quotlibet numeri continué proportionales, subducantur autem á secundo & ultimo æqualis primo, erit ut secundi exuperantia ad primum, sic ultimi exuperantia ad seipsum præcedentes omnes.* 13.*p*.9.

Ut hiç 2 4 8
2 6

Tolle 2 á 4, & ab 8 item tolle 2, ut 2 exuperantia secundi ad primum 2, sic 6 exuperantia ultimi ad 2 & 4 antecedentes, par enim utrobique ratio est, sic in 2 8 32
6 30

Ab 8 tolle 2, & totidem á 32, manent 6 & 30, atque ut 6 ad 2, sic 30 ad 8 & 2, id est ad 10. Fac periculum in majori serie, ut in

2, 4, 8, 16 32, 64
2 62

A 4 secũdo tolle 2: item á 64 ultimo tolle 2, jam erit 62, sic ad omnes antecedentes, ut 2 exuperãtia secundi ad 2 primum, utrobique enim æqualitas. Ex hac regula invẽitur summa progressio-

tia

nis geometricæ, quæ est cõpendiaria additio numerorum continua geometricæ proportionis ſerie continuatorũ. Nam facta ſubductione primi termini á ſecũdo & ultimo, habes terminos tres, unde quartus ſimilis inveniendus eſt æqualis omnibus ultimum præcedẽtibus, ut additus ultimo, ſummam compleat, ſicut vides in

2 8 32
6 30

Nam ut 6 reliquus ſecundi ſe habet ad 2 primum, ſic 30 reliquus ultimi ad præcedẽtes omnes 10, id eſt ad quartum proportionalem, ideoque hic quartus proportionalis additus ultimo, ſummam complet omnium, nempe 42.

Agricola promiſit filio pro xeniis primo anni die in triginta continuos dies grana tritici primo unum, ſecundo duo, tertio quatuor, & ſic deinceps duplicãdo, quæritur tricesimo die quot grana futura ſint. Quæratur tricesimus terminus, id eſt ultimus progreſſionis hujus, ut antea demõſtratum eſt: primo ſextus 64 per ſeſe faciet 4096 pro duodecimo termino, & hic rurſus ex ſeſe faciet 16777216 pro vicesimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminũ, facies pro vicesimo nono termino 536870 32 qui tricesimus erit, ſi unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas á ſecundo & ultimo, exuperantia ſecũdi erit æqualis primo, Itaque inventus ultimus unio dempto erit æqualis omnibus antecedentibus: addatur uterque ſum-

ma tota erit 1073741863. Idveró brevius fiet, ſi progreſſio uno termino augeatur, & æqualibus ſublatis reliquus ultimus dividatur pro exuperantia ſecundi ſupra primum.

Cap. 23. de inventione minimorum in datis rationibus.

105. *Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad ſecũdum & tertium minimi multiplicent obliqué terminos duarum primarum rationum, facti erunt continué minimi in datis rationibus: deinde ſi proportionales ad poſtremó inventum & ducem ſequentis rationis minimi multiplicent obliqué alter inventos, alter ſequentes omnes, facti erunt continué minimi in datis rationibus.* 4.p.8.

Ut hic vides,

5	6	4	3
10	12		9

Nam ſi ſumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum ſi multiplices obliqué 6 & 5 per 2, facies

cies 12 & 10. Item si per 3 multiplices obliqué 4 & 3, facies 12 & 9 continué minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3, sic 12 ad 9. Hic autem continuatio terminorũ est in datis rationibus, ut regula præcipit, non autem cõtinuatio rationum, & hæc proportio disjuncta est rationibus, continua tantúm terminis minimis in datis rationibus, esto & aliud exemplum,

2	3	4	5	6	7
8	12		15		
16	24		30		35

In hoc exemplo proportionales ad 15 postremó inventum, & 6 ducem sequentis rationis minimi sunt 2 & 5, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16, 24, 30, 35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum. Habet veró & hæc continuatio usum valdé singularem, ut 100 aurei tribus dividantur ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties secundus 6 capiat, & quoties secundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos singuli capient? Hic duæ sunt rationes in minimis terminis, 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui sunt 35, 42, 54. Hoc modo

5	6	7	9
35	42		54

Adde igitur tres continuos repertos, totus

erit 131, & jam dicito

	35	26 $\frac{94}{131}$
131 dant 100 ergo	42 dant	32 $\frac{8}{131}$
	54	41 $\frac{29}{131}$

Partire quatuor amicis 100 aureos, sic, ut quoties primus capit 3, secundus capiat 4, & quoties secundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei singulis cedent? hic sunt tres rationes in minimis terminis dissimiles 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini sunt 105, 168, 192. Adde continuos, totus erit 605, & dicito

	105	17 $\frac{43}{121}$
	140	23 $\frac{17}{121}$
605 dant 100: ergo		dant
	168	27 $\frac{93}{121}$
	192	31 $\frac{89}{121}$

FINIS.

